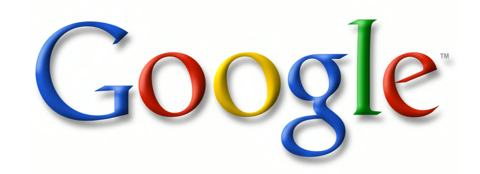
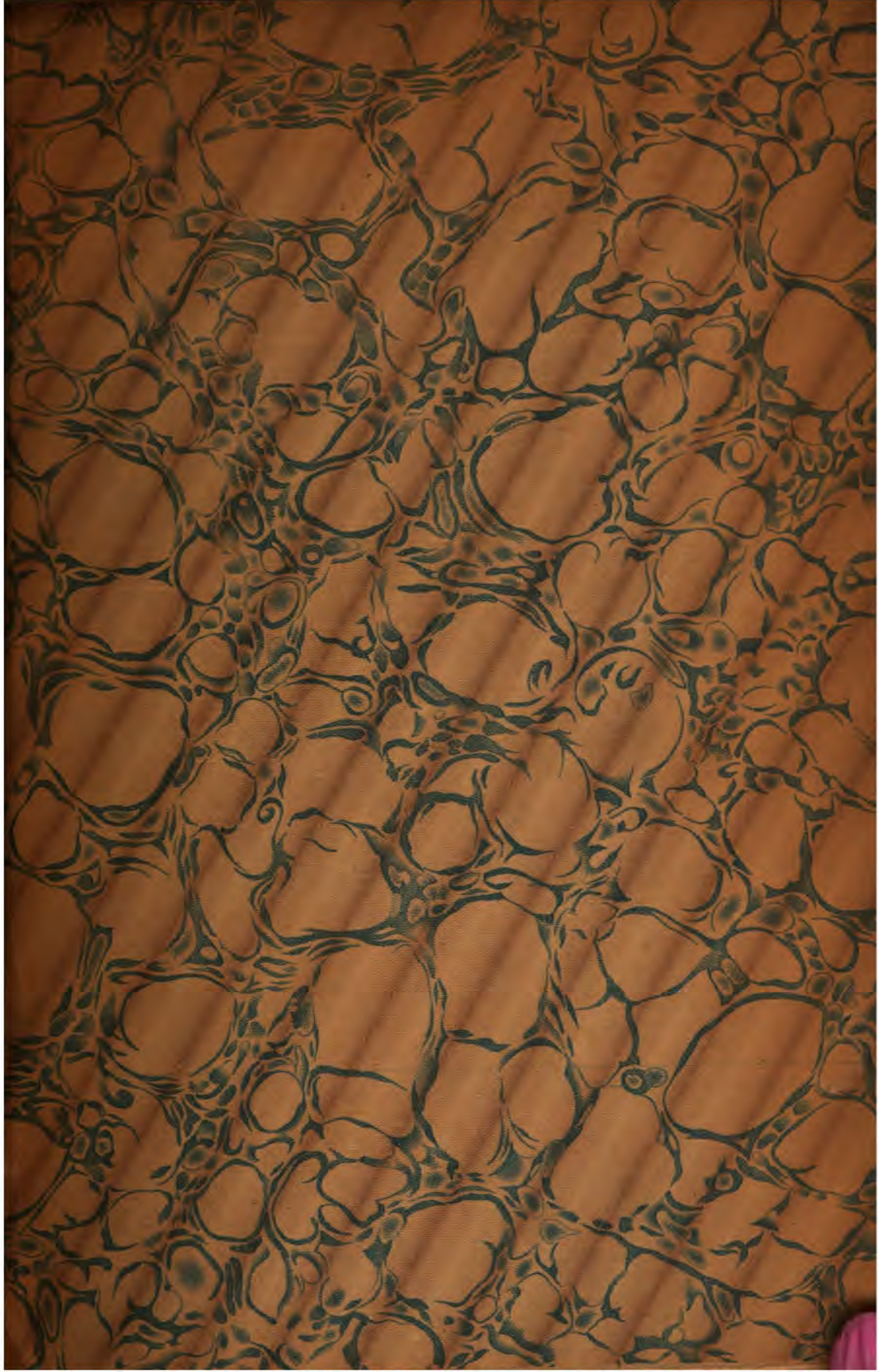

Google




1837
ARTES
SCIENTIA
LIBRARY
VERITAS
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
COLLEGE
OF
ENGINEERING



THÉORIE
DES
ENROULEMENTS
DES
MACHINES A COURANT CONTINU

5573

THÉORIE

DES

ENROULEMENTS

DES

MACHINES A COURANT CONTINU

PAR

G. SZARVADY

Chargé du Cours d'Électricité industrielle à l'École Centrale
des Arts et Manufactures.

PARIS

H. DUNOD ET E. PINAT, ÉDITEURS

47 ET 49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

1918

THÉORIE DES ENROULEMENTS

DES

MACHINES A COURANT CONTINU

La théorie des enroulements que nous allons exposer est déduite directement de la formule bien connue, établie pour la première fois par Arnold en 1891.

Cette formule, simple identité, est la clef de tous les enroulements fermés sur eux-mêmes.

Avant son apparition, les seuls enroulements connus étaient les *enroulements parallèles ordinaires*, dont le nombre des circuits est égal à celui des pôles de l'inducteur (enroulements usités pour les machines qui, comme celles destinées à l'éclairage, doivent pouvoir supporter de fortes intensités en produisant de faibles tensions), et les *enroulements série* dont le nombre des circuits est égal à *deux*, quel que soit le nombre des pôles (enroulements adoptés dans le cas de tensions relativement élevées et d'intensités relativement faibles).

Grâce à sa formule, Arnold put créer des enroulements nouveaux, dits en *séries parallèles* dont le nombre des circuits, indépendant du nombre des pôles, est un nombre pair quelconque.

La formule des enroulements permet aussi, ce qui paraît avoir échappé à son auteur, de prédéterminer :

les emplacements des balais sur le collecteur ;

le nombre, *la répartition* et *les numéros d'ordre des sections en court-circuit ;*

sans qu'il soit nécessaire de recourir aux tableaux et schémas usuels qui sont d'une confection si laborieuse et d'un emploi si incommode, dès que le nombre des lames du collecteur dépasse celui des plus petites machines.

Pour représenter ce qu'il importe de connaître dans un enroulement, c'est-à-dire précisément les emplacements des balais et les sections en court-circuit, il suffit de diagrammes extrêmement simples, possédant la propriété d'être indépendants du nombre des éléments de l'enroulement, de sorte que *le même tracé s'adapte à toutes les machines ayant même nombre de pôles et même nombre de circuits quel que soit le nombre des lames du collecteur.*

La formule générale des enroulements fermés sur eux-mêmes s'applique indistinctement aux *anneaux*, aux *tambours*, et aux *disques*. Les enroulements des anneaux étant les plus simples, nous établirons la formule et nous en étudierons les conséquences, en raisonnant sur les anneaux, et nous indiquerons ensuite les particularités des tambours et des disques.

Nous commencerons par une théorie élémentaire, dont l'application nécessite, dans chaque cas particulier, un tableau spécial pour les balais et un diagramme spécial pour les éléments en court-circuit (chapitres I à V), puis nous exposerons une théorie générale permettant de dresser des tableaux et de tracer des diagrammes, indépendants du nombre des lames du collecteur et du pas de l'enroulement (chapitres VI et VII).

Un chapitre (chapitre VIII) sera consacré aux enroulements multiples, un autre (chapitre IX) aux enroulements à pas réduit, un troisième (chapitre X) aux enroulements des tambours et des disques. Enfin pour conclure nous résumerons les résultats obtenus (chapitre XI) et nous en ferons l'application à une machine de 36 pôles ayant près de 3.000 lames de collecteur.

CHAPITRE PREMIER

FORMULE DES ENROULEMENTS A PAS NORMAL

1° Définitions

Quelques définitions et précisions sont nécessaires.

Les enroulements que nous envisagerons sont tous fermés sur eux-mêmes.

Les *enroulements des* ANNEAUX comprennent un nombre N de SECTIONS dont chacune est composée de m SPIRES. Le nombre total des spires est : $N' = m \cdot N$.

Le nombre des *lames du collecteur* est égal à celui des sections. Nous numéroterons les lames de 1 à (N — 1) dans l'ordre où elles se présentent sur le collecteur, la dernière lame recevant indifféremment le numéro N ou *zéro*.

Rattachons une extrémité de chaque section (la même pour toutes) à la lame du collecteur la plus voisine et donnons à la section le numéro de cette lame (fig. 1).

L'extrémité ainsi rattachée au collecteur sera, par définition, l'ENTRÉE de la section, l'autre extrémité, restée provisoirement libre, en sera la SORTIE.

Le problème des enroulements consiste à déterminer les numéros d'ordre des lames du collecteur auxquelles doivent être rattachées les sorties des différentes sections, suivant l'usage

auquel la machine est destinée (machine à grande tension et faible intensité, ou machine à faible tension et grande intensité ou machine intermédiaire).

Soit $2p$ le nombre des *pôles*, il y a $2p$ *régions neutres* que nous numéroterons dans le même sens que les lames du collecteur et nous donnerons à chaque *demi-ligne neutre* le numéro d'ordre de la région neutre qui la contient.

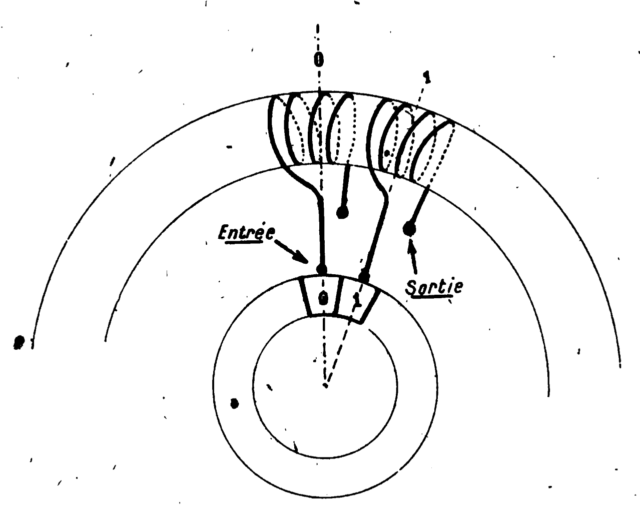


Fig. 1. — *Enroulements en anneau.*
Entrées et sorties des sections,

Nous numéroterons, enfin, les *balais* dans le même sens que les lames du collecteur et que les lignes neutres.

Orientons l'induit de façon à amener la lame *zéro* ou N à être à cheval sur la ligne neutre *zéro* ou $2p$.

Bien que l'induit soit immobile, nous imaginerons que chaque spire soit, néanmoins, le siège d'une force électromotrice identique à celle qui prendrait naissance dans cette spire, au moment où elle passerait par sa position actuelle, si l'induit tournait à sa vitesse normale.

Ceci posé, envisageons le cas des ENROULEMENTS PARALLÈLES ORDINAIRES.

Dans ces enroulements l'entrée et la sortie de chaque section sont reliées à deux lames consécutives du collecteur, comme dans les enroulements bipolaires.

Concevons à l'intérieur du conducteur formant l'enroulement, un mobile, se déplaçant dans le sens du numérotage en partant de la lame et de la ligne neutre zéro.

Les premières et les dernières sections qu'il traverse, en passant de la *ligne zéro* à la *ligne un*, sont situées dans les régions neutres zéro et un, leurs forces électromotrices sont nulles.

Les sections intermédiaires sont situées dans un même champ, leurs forces électromotrices sont de même sens et la somme de ces forces électromotrices est une *force électromotrice partielle de l'induit.*

Le mobile continuant son chemin, les sections actives qu'il traverse avant d'atteindre la ligne neutre suivante (ligne n° 2) se trouvent en regard d'un pôle de nom contraire au précédent et leurs forces électromotrices individuelles, ainsi que la force électromotrice partielle correspondante de l'induit, sont dirigées en sens inverse des précédentes.

Chaque fois que le mobile traverse, de la sorte, une ligne neutre, il voit les forces électromotrices changer de sens et quand il a achevé son parcours, il a rencontré $2p$ forces électromotrices partielles, alternativement égales et de signes contraires, dont la somme totale est nulle.

Plaçons un balai à cheval sur chacune des lignes neutres, les balais seront alternativement positifs et négatifs.

Relions entre eux, d'une part les balais positifs, de l'autre les balais négatifs et rattachons aux deux groupes de balais ainsi obtenus, les deux extrémités du circuit extérieur.

Le circuit sans fin, qui constitue l'enroulement, sera partagé par les $2p$ balais en $2p$ *circuits partiels,* lesquels se trouveront disposés *en dérivation* par rapport au circuit extérieur, d'où le nom de CIRCUITS DÉRIVÉS qui leur est attribué. On les appelle aussi VOIES D'ENROULEMENTS.

Chacune des $2p$ dérivations contient une force électromotrice partielle et les $2p$ forces électromotrices partielles sont égales entre elles, par raison de symétrie.

L'induit de la machine, on le sait, peut être assimilé à une batterie de piles, dont les éléments seraient disposés de façon à constituer $2p$ dérivations identiques et la force électromotrice

de la machine, comme celle de la batterie, est égale à la force électromotrice d'une quelconque des dérivations.

Evaluons cette force électromotrice.

Soit Φ la partie du flux total, émanant d'un pôle, qui pénètre dans l'induit. Le flux traversant une spire située dans un plan neutre est $\Phi/2$ et comme le flux change de sens d'un plan à l'autre, la variation du flux embrassé par la spire considérée est égale à Φ quand cette spire passe d'un plan neutre au suivant.

Soit n le nombre des tours de l'induit par seconde, le temps mis par la spire à effectuer ce déplacement est $1/2pn$ et la force électromotrice moyenne correspondante est :

$$e = \Phi \times 2\, pn.$$

La force électromotrice totale d'une dérivation et celle de la machine sont :

$$E = \frac{N}{2p} \cdot me = mN\Phi n.$$

Il va de soi que pour avoir cette force électromotrice, exprimée en volts, on multiplie le second membre par 10^{-8}.

Le courant extérieur I se ramifie à l'intérieur de l'induit en courants partiels, ayant chacun pour valeur : $i = \frac{I}{2p}$.

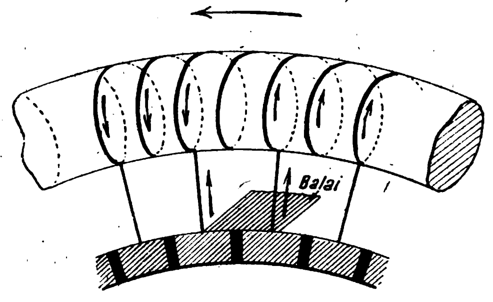


Fig. 2. — *Enroulements en anneau.*
Section en court-circuit.

L'induit étant en mouvement, lorsqu'une section quelconque passe d'un côté à l'autre d'un même balai (fig. 2), le courant qui traverse la section change de sens et au cours de ce passage, les deux lames du collecteur auxquelles aboutissent

l'entrée et la sortie de la section se trouvent, pendant un temps très court, en contact simultanément avec le même balai. La section est alors en *court-circuit*. C'est le phénomène de la *commutation*.

La *durée du court-circuit* dépend de la largeur des balais. Nous appellerons BALAI NORMAL un balai dont la largeur de contact est égale à la somme des épaisseurs d'une lame et d'un isolant (fig. 3) et, sauf indication contraire, nous supposerons

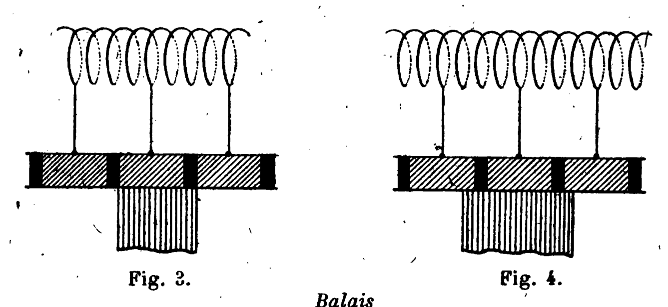


Fig. 3. — Fig. 4.

Fig. 3. Balai normal (ne met en court-circuit qu'une section à la fois). — Fig. 4. Balai mettant en court-circuit deux sections à la fois.

toujours l'emploi de balais normaux. Avec des balais normaux la durée du court-circuit est comprise, suivant la nature des machines, entre 1/200 et 1/5000 de seconde.

Les balais, dont la largeur est inférieure ou égale à celle d'un balai normal, ne mettent en court-circuit qu'une section à la fois, ceux dont la largeur est comprise entre une et deux fois celle d'un balai normal, mettent en court-circuit deux sections à la fois (fig. 4) et ainsi de suite.

2° Formule générale. — Polygones représentatifs. — Remarques sur les paramètres de la formule. — Formes particulières de cette formule

Au lieu de joindre, bout à bout, comme dans les enroulements ordinaires, les sections placées, côte à côte, dans un même champ, prenons successivement une section dans chacun des champs de même polarité.

Relions à cet effet la sortie de la section *zéro* à une lame *y*

voisine de la ligne neutre *deux*, puis relions la sortie de la section y à la lame $2y$, la sortie de la section $2y$ à la lame $3y$ et ainsi de suite (fig. 5). Quand nous aurons rattaché de la sorte un nombre p de sections à l'enroulement (p étant, nous

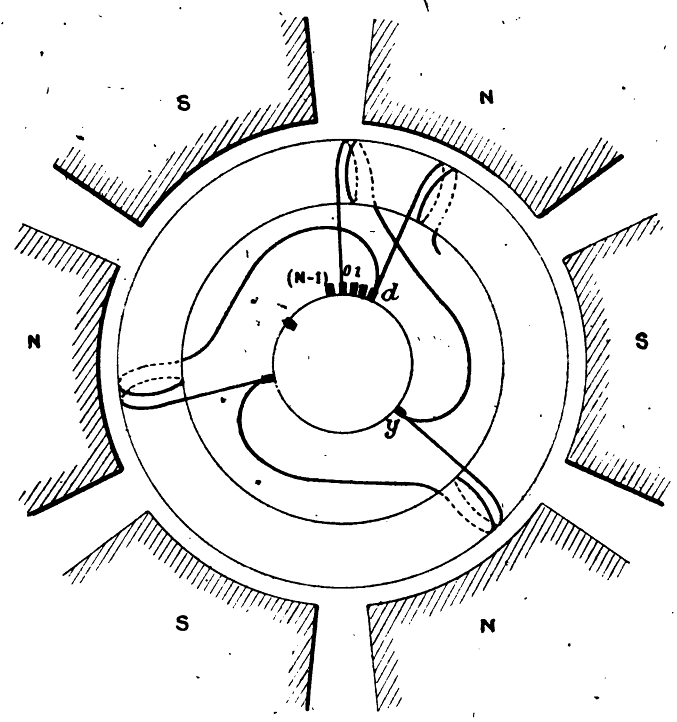


Fig. 5. — *Enroulements à pas normal. Traduction graphique de la formule*

$$y = \frac{N \pm d}{p}.$$

le rappelons, le demi-nombre des pôles) nous aurons progressé sur le collecteur d'un nombre de lames py et nous aboutirons à une lame $\pm d$ voisine de la lame zéro d'où nous sommes partis, nous aurons donc *identiquement :*

$$py = N \pm d$$

y est par définition le PAS DE L'ENROULEMENT.

Cette identité peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{y = \frac{N \pm d}{p}}$$

C'est la FORMULE DES ENROULEMENTS A PAS NORMAL.

Il existe des enroulements à *pas réduit*, constituant une catégorie distincte, que nous étudierons plus loin (chap. IX).

Chaque fois que l'on rattache à l'enroulement, comme il vient d'être dit, p sections consécutives, on progresse de d lames, sur le collecteur, dans le sens du numérotage ou en sens inverse, suivant que d est affecté du signe $+$ ou du signe $-$.

Dans le premier cas l'enroulement est dit PROGRESSIF (PRO), dans le second il est dit RÉTROGRADE (RETRO).

On peut employer un mode de représentation des enroulements, plus simple que celui de la figure (5), en se bornant à tracer la coupe du collecteur et en joignant les lames de y en y,

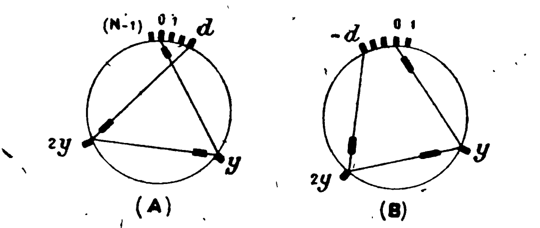


Fig. 6. — *Enroulements à pas normal. Polygones représentatifs.*
(A) Enroulement progressif. — (B) Enroulement rétrograde.

par des droites figurant schématiquement les sections (fig. 6).

Les polygones ainsi obtenus sont les POLYGONES REPRÉSENTATIFS des enroulements.

Dans le cas des enroulements ordinaires ces polygones sont des polygones ordinaires, mais, dans le cas actuel, ils sont étoilés. Nous appellerons ENROULEMENTS ÉTOILÉS ceux dont les polygones représentatifs sont des polygones étoilés.

Les petits traits de la figure, qui sont renforcés, indiquent les extrémités constituant les entrées des sections, de sorte que le numéro d'une section quelconque est celui de la lame à laquelle aboutit celle des deux extrémités qui porte le trait renforcé.

Il est inutile d'achever les schémas des figures 5 et 6, il suffit de les amorcer comme il est indiqué.

Pour qu'un enroulement ne se ferme sur lui-même qu'après avoir englobé la totalité des sections de l'induit, il faut et il suffit que le pas y soit premier avec le nombre N des sections et

des lames du collecteur. Cela résulte immédiatement de l'application d'une propriété connue des polygones étoilés au polygone représentatif de l'enroulement.

La condition que le pas y de l'enroulement et le nombre N des sections soient premiers entre eux a pour conséquence deux autres conditions entre les paramètres : p. d. N. y. de la formule générale, savoir :

(i) *y est nécessairement premier avec d* :

car si y et d avaient un plus grand commun diviseur Δ on aurait :

$$y = \Delta y'$$
$$d = \Delta d'$$
$$N = py \mp d = (py' \mp d')\,\Delta$$

N serait donc divisible par Δ et ne serait pas premier avec y.

(ii) *p. d. N. ont même plus grand commun diviseur.*

En effet, soit Δ le plus grand commun diviseur de d et de N.

Posons :
$$N = \Delta N'$$
$$d = \Delta d'$$

d'où :
$$y = \frac{(N' \pm d')\,\Delta}{p}$$

y, premier avec N et d, ne peut avoir de facteur commun avec leur diviseur Δ, il faut donc que p soit divisible par Δ :

Posons :
$$p = \Delta p'$$

nous aurons :
$$y = \frac{N' \pm d'}{p'}$$

N' et d' étant premiers entre eux, p' qui divise leur somme ou leur différence est également premier avec eux et, par conséquent, Δ est bien le plus grand commun diviseur, à la fois, de p, de d et de N.

Pour certaines valeurs de Δ la formule générale prend des formes particulières utiles à noter

pour $\Delta = d$ $\quad d' = 1$ on a : $y = \frac{N' \pm 1}{p'}$

pour $\Delta = p$ $\quad p' = 1$ on a : $y = N' \pm d'$

pour $\Delta = p = d$ $\quad p' = d' = 1$ on a : $y = N' \pm 1$

3° Nombre des circuits de l'induit

Le nombre d qui, dans l'identité $py = N \pm d$, *représente un certain nombre de lames du collecteur est aussi le demi-nombre des circuits de l'induit et le demi-nombre des balais, lorsque y et N sont premiers entre eux.*

En effet, considérons, comme nous l'avons fait dans le cas des enroulements ordinaires, un mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement dans le sens du numérotage en partant de la lame et de la ligne neutre zéro.

Il commencera par traverser des sections, situées dans des champs de même polarité, qui seront, par suite, le siège de forces électromotrices de même sens et nous devrons placer un balai, au moment où le mobile atteindra une section située dans un champ de polarité opposée à celle des champs précédents.

Or, chaque fois que le mobile traverse une section de l'enroulement, il progresse en même temps sur le collecteur d'un nombre de lames égal à y et il tourne, par suite, autour de l'axe de l'induit, d'un angle ayant pour mesure l'arc $\left(\frac{2\pi}{N} y\right)$ mais qui, évalué en nombre de lames du collecteur, peut être représenté simplement par y, l'angle 2π étant représenté par N.

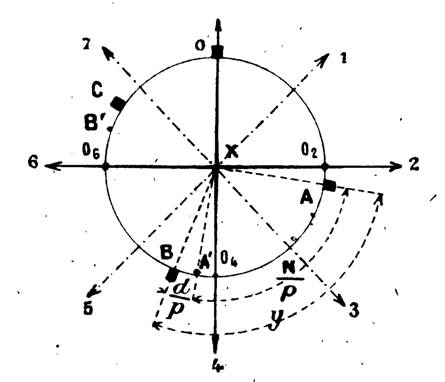


Fig. 7. — *Enroulements à pas normal.*
Décomposition du pas y de l'enroulement.
$\frac{N}{p}$ est le pas polaire.
$\frac{d}{p}$ est le pas magnétique.

La formule générale mise sous la forme :

$$y = \frac{N}{p} \pm \frac{d}{p}$$

montre que cet angle se compose de deux parties :

l'une $\frac{N}{p}$, angle de deux lignes neutres homologues consécutives, qu'on appelle le pas polaire, a simplement pour effet de faire passer le mobile, du point initial A (entrée de la section)

(fig. 7) à un point A′ identiquement placé dans le champ homologue suivant;

l'autre, $\pm \frac{d}{p}$ qu'on appelle le PAS MAGNÉTIQUE, déplace le mobile à l'intérieur du nouveau champ, en le faisant passer du point A′ au point B (sortie de la section).

Le mobile, partant de la lame zéro dont l'axe se confond avec la ligne neutre zéro, est amené par la première section au point A dont l'écart angulaire, par rapport à la ligne neutre n° 2, est : $O_2XA = \pm \frac{d}{p}$. Il est ensuite amené, par la seconde section, au point B dont l'écart angulaire, par rapport à la ligne neutre n° 4, est : $O_4XB = \pm 2 \frac{d}{p}$ et ainsi de suite; chaque nouvelle section traversée augmentant de $\pm \frac{d}{p}$ l'écart entre le mobile et la ligne neutre paire la plus voisine.

Lorsque cet écart, dont l'accroissement $\pm \frac{d}{p}$ n'est autre que le pas magnétique, vient à dépasser $\frac{N}{2p}$, les sections suivantes, traversées par le mobile, se trouvent situées dans des champs de polarité opposée à celle des champs précédents, et il est nécessaire de placer un balai.

Le nombre N_1 des sections, traversées à ce moment, sera tel que :

$$(N_1 - 1) \frac{d}{p} < \frac{N}{2p} \leqq N_1 \frac{d}{p}$$

d'où :

$$(N_1 - 1) < \frac{N}{2d} \leqq N_1.$$

N_1 est donc le plus petit nombre entier contenant le nombre entier ou fractionnaire $\frac{N}{2d}$.

En procédant de même, chaque fois que la progression magnétique fait franchir une ligne neutre, on placera le i^{me} balai quand le mobile aura traversé un nombre de sections N_i tel que :

$$(N_i - 1) \frac{d}{p} < i \frac{N}{2p} \leqq N_i \frac{d}{p}$$

d'où :

$$N_i - 1 < i \frac{N}{2d} \leqq N_i$$

N_i est le plus petit nombre entier contenant le nombre entier ou fractionnaire $i \frac{N}{2d}$.

Posons : $$N_i = \frac{iN + \delta_i}{2d}$$

δ_i *étant, par définition, un nombre entier inférieur à* $2d$ *tel que* N_i *soit lui-même un nombre entier.*

Puisque y et N sont, par hypothèse, premiers entre eux, nous savons que le mobile ne reviendra à son point de départ qu'après avoir traversé toutes les sections.

Or pour : $i = 2d$ on a $N_{2d} = N$. Le balai posé, au moment où le mobile achève son parcours, est donc le $2d^{me}$ balai, et par conséquent *le nombre des balais et des dérivations est* $2d$.

c. q. f. d.

Étant donnée une machine à $2p$ *pôles*, on peut toujours choisir pour N et pour y deux nombres premiers entre eux, satisfaisant à la relation $y = \frac{N \pm d}{p}$ dans laquelle d est un nombre arbitraire.

On peut donc toujours réaliser, pour un nombre de pôles donné $2p$, *un enroulement ayant un nombre pair quelconque de circuits* $2d$.

Les propriétés d'un tel enroulement sont, dans une certaine mesure, analogues à celles de *d enroulements-série* qui seraient réunis, en dérivation ou *en parallèle*, d'où le nom d'ENROULEMENT EN SÉRIES PARALLÈLES.

Au lieu de placer les balais immédiatement APRÈS avoir franchi une ligne neutre, on peut les placer immédiatement AVANT.

On a dans ce cas :

$$N_i \leq i\frac{N}{2d} < N_i + 1$$

d'où : $$N_i = \frac{iN - \delta_i}{2d}.$$

Les deux solutions sont équivalentes. Il suffit pour passer de l'une à l'autre, d'inverser le sens du numérotage sans toucher aux balais. En effet, le mobile parcourant, cette fois, l'enroulement en sens contraire, le balai qui occupait le rang i, dans le parcours précédent, occupera le rang $(2d - i)$ dans le

parcours actuel et le nombre des sections traversées pour l'atteindre sera :

$$N_{2d-i} = N - N_i$$

d'où :
$$N_{2d-i} = N - \frac{iN + \delta_i}{2d} = \frac{(2d - i)N - \delta_i}{2d}.$$

δ_i se trouve cette fois affecté du signe — au lieu du signe +.

On pourra donc adopter pour N_i l'une ou l'autre des valeurs données par la formule générale :

$$\boxed{N_i = \frac{iN \pm \delta_i}{2d}}$$

à condition, bien entendu, d'affecter δ_i du même signe pour tous les balais. δ_i est pris, ici, en valeur absolue.

Si on convient d'attribuer a δ_i des valeurs positives et négatives, la formule générale est :

$$N_i = \frac{iN + \delta_i}{2d}.$$

Lorsque δ_i s'annule pour une valeur particulière de i le balai correspondant est *à cheval* sur une ligne neutre.

Trois cas peuvent donc se présenter suivant les valeurs prises par δ_i, nous les désignerons par les abréviations ci-après :

$\delta_i > 0$	Balai *en avant* de la ligne neutre correspondante :	(BAV)
$\delta_i < 0$	— *arrière* — —	(BAR)
$\delta_i = 0$	— *à cheval* sur une ligne neutre	(BAC)

Pour $i = 1$ on a : $N_1 = \dfrac{N \pm \delta_1}{2d}$

nous désignerons simplement par δ le terme δ_1, qui joue un rôle important et nous écrirons en conséquence :

$$\boxed{N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d}}$$

En général, ainsi que nous le verrons (Chap. VII, § 5, p. 75) *on fait en sorte que p soit un multiple de d.*

Lorsqu'il en est ainsi, le quotient :

$$\frac{N}{d} = \frac{p}{d_1} y \mp 1$$

est un nombre entier et par conséquent δ est nul ou égal à $\pm d$ suivant que $\frac{N}{d}$ est pair ou impair.

Lorsque δ est nul, δ_i est nul, quel que soit i, et tous les balais sont à cheval sur des lignes neutres.

Lorsque δ est égal à $\pm d$, le terme δ_i est nul, pour les valeurs paires de i, et égal à $\pm d$, pour les valeurs impaires, de sorte que, dans ce cas, les balais pairs sont encore à cheval sur des lignes neutres, mais les balais impairs sont en avant ou en arrière des lignes neutres (selon le signe choisi pour δ).

4° Force électromotrice de la machine

L'expression de la force électromotrice de la machine, qui est la même que celle d'une des dérivations, s'obtient par le même raisonnement que la force électromotrice d'un enroulement ordinaire, mais le nombre des sections comprises dans une dérivation étant ici $2d$ au lieu de $2p$ on a :

$$\boxed{E = \frac{p}{d} N'\Phi n = \frac{p}{d} N\Phi mn}$$

CHAPITRE II

EMPLACEMENTS DES BALAIS

1° Principe de la méthode. — Progression, sur le collecteur, correspondant à un nombre quelconque de sections.
2° Formule des balais. — Applications.
3° Nombre des sections comprises dans chacune des dérivations de l'induit. — Ordre de succession des dérivations d'espèces différentes. — Pas des balais. — Applications.
4° Enroulements symétriques.

§ 1. — Principe de la méthode. — Progression sur le collecteur correspondant a un nombre quelconque de sections

Proposons-nous de prédéterminer *les numéros d'ordre de celles des lames du collecteur qui doivent recevoir des balais.*

Cherchons, à cet effet, quelle est la progression sur le collecteur, qui correspond à un déplacement donné d'un mobile se mouvant à l'intérieur de l'enroulement.

Puisque le mobile, en traversant *une* section, progresse de y lames sur le collecteur, sa progression, quand il traverse M sections, est de My lames, et sa *progression relative* est, évidemment, la différence entre le nombre My et le plus grand multiple de N que ce nombre contient, soit :

$$L = My - (\text{mult. } N).$$

On peut simplifier le calcul, en se rappelant que *p sections font progresser de $\pm$ d lames* :

Posons : $M = mp + n \quad n < p.$

Nous décomposons, ainsi, les M sections considérées en m groupes de p sections et en n sections individuelles.

Chaque groupe de p sections faisant progresser de $\pm\ d$ lames et chaque section individuelle de y lames, la progression totale est :

$$L = \pm\ md + ny.$$

Le signe de d est le même dans cette expression que dans la formule : $y = \frac{N \pm d}{p}$.

Si le mobile est parti de la lame *zéro*, le nombre L est le numéro d'ordre de la lame à laquelle il aboutit après avoir traversé M sections.

§ 2. — Formule des balais. — Applications

Nous obtiendrons, évidemment, l'emplacement du i^{me} balai, en mettant N_i sous la forme $mp + n$ et en appliquant la formule que nous venons d'établir.

Posons donc :

$$N_i = m_i p + n_i \qquad n_i < p$$

le numéro de la lame du collecteur qui reçoit le i^{me} balai sera :

$$\boxed{L_i = \pm\ m_i d + n_i y}$$

C'est la FORMULE DES BALAIS.

En donnant à i les valeurs 1. 2... $2d$ et en calculant les valeurs correspondantes de N_i m_i n_i et L_i nous aurons, successivement, les emplacements de tous les balais, dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement, dans le sens du numérotage, en partant de la lame et de la ligne neutre zéro.

A titre d'exemple, nous appliquerons cette formule aux huit cas suivants :

1°	$p = 6$	$d = 3$	$N = 651$	Enroulement	progressif.	Balais	en avant.
2°	—	—	—	—	—	—	en arrière.
3°	—	—	$N = 639$	—	rétrograde.	—	en avant.
4°	—	—	—	—	—	—	en arrière.
5°	$p = 6$	$d = 9$	$N = 645$	—	progressif.	—	en avant.
6°	—	—	—	—	—	—	en arrière.
7°	—	—	—	—	rétrograde.	—	en avant.
8°	—	—	—	—	—	—	en arrière.

Les calculs sont résumés dans les tableaux ci-après :

Applications de la formule des balais.

$p = 6 \qquad d = 3$

ENROULEMENT PROGRESSIF

$$N = 651 \qquad y = \frac{651 + 3}{6} = 109 \qquad L_i = 3m_i + 109\, n_i$$

(1) BAV. $N_i = \dfrac{651\, i + \delta_i}{6}$ ‖ (2) BAR. $N_i = \dfrac{651\, i - \delta_i}{6}$

i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN	i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN
1	3	109	18	1	163	3	1	3	108	18	0	54	1
2	0	217	36	1	217	4	2	0	217	36	1	217	4
3	3	326	54	2	380	7	3	3	325	54	1	271	5
4	0	434	72	2	434	8	4	0	434	72	2	434	8
5	3	543	90	3	597	11	5	3	542	90	2	488	9
6	0	651	108	3	651	12	6	0	651	108	3	651	12

ENROULEMENT RÉTROGRADE

$$N = 639 \qquad y = \frac{639 - 3}{6} = 106 \qquad L_i = -3m_i + 106\, n_i$$

(3) BAV. $N_i = \dfrac{639\, i + \delta_i}{6}$ ‖ (4) BAR. $N_i = \dfrac{639\, i - \delta_i}{6}$

i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN	i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN
1	3	107	17	5	479	9	1	3	106	17	4	373	7
2	0	213	35	3	213	4	2	0	213	35	3	213	4
3	3	320	53	2	53	1	3	3	319	53	1	586	11
4	0	426	71	0	426	8	4	0	426	71	0	426	8
5	3	533	88	5	266	5	5	3	532	88	4	160	3
6	0	639	106	3	0	0	6	0	639	106	3	0	0

Les nombres inscrits dans les colonnes intitulées RN sont les numéros d'ordre des régions neutres qui contiennent les balais successifs.

$p = 6 \qquad d = 9$

Le nombre des dérivations étant supérieur à celui des pôles, certaines régions neutres doivent contenir plusieurs balais.

ENROULEMENT PROGRESSIF

$$N = 645 \qquad y = \frac{645 + 9}{6} = 109 \qquad L_i = 9\, m_i + 109\, n_i$$

(5) BAV. $N_i = \dfrac{645\, i + \delta_i}{18}$ ‖ (6) BAR. $N_i = \dfrac{645\, i - \delta_i}{18}$,

i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN	i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN
1	3	36	6	0	54	1	1	15	35	5	5	590	11
2	6	72	12	0	108	2	2	12	71	11	5	644	12
3	9	108	18	0	162	3	3	9	107	17	5	53	1
4	12	144	24	0	216	4	4	6	143	23	5	107	2
5	15	180	30	0	270	5	5	3	179	29	5	161	3
6	0	215	35	5	215	4	6	0	215	33	5	215	4
7	3	251	41	5	269	5	7	15	250	41	4	160	3
8	6	287	47	5	323	6	8	12	286	47	4	214	4
9	9	323	53	5	377	7	9	9	322	53	4	268	5
10	12	359	59	5	431	8	10	6	358	59	4	322	6
11	15	395	65	5	485	9	11	3	394	65	4	376	7
12	0	430	71	4	430	8	12	0	430	71	4	430	8
13	3	466	77	4	484	9	13	15	465	77	3	375	7
14	6	502	83	4	538	10	14	12	501	83	3	429	8
15	9	532	89	4	592	11	15	9	537	89	3	483	9
16	12	574	95	4	1	0	16	6	573	95	3	537	10
17	15	610	101	4	55	1	17	3	609	101	3	591	11
18	0	645	109	0	0	0	18	0	645	109	0	645	12

| $p = 6 \quad d = 9$ | (*Suite.*)

ENROULEMENT RÉTROGRADE

$$N = 645 \qquad y = \frac{645 - 9}{6} = 106 \qquad L_i = -9\, m_i + 106\, n_i$$

(7) BAV. $N_i = \dfrac{645\, i + \delta_i}{18}$ ‖ (8) BAR. $N_i = \dfrac{645\, i - \delta_i}{18}$

i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN	i	δ_i	N_i	m_i	n_i	L_i	RN
1	3	36	6	0	591	11	1	15	35	5	5	485	9
2	6	72	12	0	537	10	2	12	71	11	5	431	8
3	9	108	18	0	483	9	3	9	107	17	5	377	7
4	12	144	24	0	429	8	4	6	143	23	5	323	6
5	15	180	30	0	375	7	5	3	179	29	5	269	5
6	0	215	35	5	215	4	6	0	215	35	5	215	4
7	3	251	41	5	161	3	7	15	250	41	4	55	1
8	6	287	47	5	107	2	8	12	286	47	4	1	0
9	9	323	53	5	53	1	9	9	322	53	4	592	11
10	12	359	59	5	644	12	10	6	358	59	4	538	10
11	15	395	65	5	590	11	11	3	394	65	4	484	9
12	0	430	71	4	430	8	12	0	430	71	4	430	8
13	3	466	77	4	376	7	13	15	465	77	3	270	5
14	6	502	83	4	322	6	14	12	501	83	3	216	4
15	9	538	89	4	268	5	15	9	537	89	3	162	3
16	12	574	95	4	214	4	16	6	573	95	3	108	2
17	15	610	101	4	160	3	17	3	609	101	3	54	1
18	0	645	109	0	645	12	18	0	645	109	0	0	0

§ 3. — Nombre des sections comprises dans chacune des dérivations de l'induit. — Ordre de succession des dérivations d'espèces différentes. — Pas des balais. — Applications.

On peut déterminer les emplacements des balais, d'une façon plus rapide que par l'emploi de la formule précédente, en considérant les *pas des balais*.

Au lieu d'envisager le nombre des sections comprises entre le balai *zéro* et le balai *i*, ainsi que la progression correspondante; cherchons le nombre des sections comprises entre deux balais consécutifs quelconques, c'est-à-dire dans une dérivation quelconque.

A. — Sections comprises dans une dérivation.

Mettons la relation :

$$N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d}$$

sous la forme :

$$N = 2dN_1 \mp \delta$$

et multiplions les deux membres par $\frac{i}{2d}$ il vient :

$$i\frac{N}{2d} = iN_1 \mp i\frac{\delta}{2d}.$$

D'autre part :

$$N_i = i\frac{N}{2d} \pm \frac{\delta_i}{2d}$$

d'où en éliminant N :

$$N_i = iN_1 \mp \frac{i\delta - \delta_i}{2d}.$$

Posons :

$$q_i = \frac{i\delta - \delta_i}{2d}.$$

q_i (différence des deux nombres entiers N_i et iN_1) est un nombre entier.

δ_i par définition est inférieur à $2d$.

q_i est donc le quotient et δ_i le reste de la division de $i\delta$ par $2d$.

Substituons, il vient :

$$N_i = iN_1 \mp q_i$$

on a de même :

$$N_{i-1} = (i-1)\, N_1 \mp q_{i-1}$$

d'où par différence :

$$n_i = N_i - N_{i-1} = N_1 \mp (q_i - q_{i-1}).$$

n_i est le nombre des sections comprises entre les balais $(i-1)$ et i, c'est-à-dire dans la i^{me} dérivation, c'est le nombre que nous cherchons.

Or, lorsque i varie de 1 à $2d$, q_i varie de zéro à δ, la différence $(q_i - q_{i-1})$ prend donc δ fois la valeur *un*, et $(2d - \delta)$ fois la valeur *zéro* et par conséquent :

n_i prend $(2d - \delta)$ fois la valeur N_1
et δ — — $(N_1 \mp 1)$.

Pour simplifier l'écriture nous poserons : $(N_1 \mp 1) \equiv N_\delta$.

B. — Ordre de succession.

Il nous reste à déterminer l'ordre dans lequel n_i prend l'une et l'autre des deux valeurs : N_1 et N_δ.

Inscrivons, dans une circonférence divisée en $2d$ parties égales, un polygone régulier de pas δ, polygone que nous représenterons conventionnellement par le symbole $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$.

Les points de division de la circonférence étant numérotés de 1 à $2d$, faisons parcourir le polygone, dans le sens du numérotage, par un mobile partant de la division $2d$ ou *zéro* et numérotons les côtés du polygone dans l'ordre où ils sont parcourus par ce mobile.

Les côtés successifs du polygone représenteront schématiquement les dérivations successives de l'enroulement.

Les numéros d'ordre des sommets, atteints successivement, sont les valeurs successives de δ_i et le nombre de tours complets de la circonférence, effectués par le mobile, au moment où il achève le parcours du i^{me} côté, est la valeur correspondante de q_i.

q_i augmente évidemment d'une unité et par conséquent

$(q_i - q_{i-1})$ prend la valeur *un* et n_i la valeur N_δ, toutes les fois que le mobile, en parcourant un côté, dépasse ou atteint l'origine.

Lorsque δ *et* $2d$ *sont premiers entre eux*, le nombre des côtés du polygone $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$ est $2d$, le nombre des tours complets qu'exige son parcours est δ et ce parcours détermine l'ordre dans lequel la différence $(q_i - q_{i-1})$ prend les valeurs *zéro* et *un*, lorsque i varie de 1 à $2d$.

Si δ *et* $2d$ *ont un plus grand commun diviseur* a, le nombre des côtés du polygone n'est plus que $\frac{2d}{a}$ et le nombre de tours qu'exige son parcours est $\frac{\delta}{a}$. En d'autres termes, le polygone se ferme pour :

$$i = \frac{2d}{a} \qquad q_i = \frac{\delta}{a}.$$

Recommençons le parcours, δ_i repassera par les mêmes valeurs que précédemment et le polygone se refermera à nouveau pour :

$$i = 2\,\frac{2d}{a} \qquad q_i = 2\,\frac{\delta}{a}.$$

En continuant, de même, on aura à la fin du a^{me} parcours :

$$i = 2d \qquad q_i = \delta$$

et par conséquent en répétant a fois le parcours du polygone, on aura encore l'ordre dans lequel $(q_i - q_{i-1})$ prend les valeurs *zéro* et *un* lorsque i varie de 1 à $2d$.

On peut aussi considérer le polygone $\left[\frac{\delta'}{d'}\right]$ de pas : $\delta' = \frac{\delta}{a}$ inscrit dans une circonférence divisée en : $d' = \frac{2d}{a}$ parties égales.

Dans ce cas, les valeurs correspondantes de δ_i sont les numéros d'ordre δ'_i des sommets, multipliés par a.

Exemples :

Le polygone $\left[\frac{3}{10}\right]$ est représenté par la figure 8 *A*. Les valeurs de i pour lesquelles $(q_i - q_{i-1})$ prend la valeur *un* sont :

$$\begin{aligned} i &= 4 \quad \text{avec} \quad \delta_4 = 2 \\ i &= 7 \quad \phantom{\text{avec}} \quad \delta_7 = 1 \\ i &= 10 \quad \phantom{\text{avec}} \quad \delta_{10} = 0 \end{aligned}$$

Le polygone $\left[\frac{9}{12}\right]$ est représenté par la figure 8 *B*, on a : $(q_i - q_{i-1}) = 1$ pour :

	$i =$	2 3 4	6 7 8	10 11 12
avec	$\delta_i =$	6 3 0	6 3 0	6 3 0

Le polygone $\left[\frac{3}{4}\right]$ est représenté par la figure 8 *C* et l'on a : $(q_i - q_{i-1}) = 1$ pour :

	$i =$	2.3.4	6.7.8	10.11.12
avec	$\delta'i =$	2.1.0	2.1.0	2. 1. 0
et	$\delta_i =$	6.3.0	6.3.0	6. 3. 0

En résumé :

les $2d$ circuits de l'induit se partagent en :

$(2d - \delta)$ circuits comprenant chacun N_1 sections
δ — — — N_δ —

et l'ordre dans lequel se succèdent les dérivations de N_1 et de

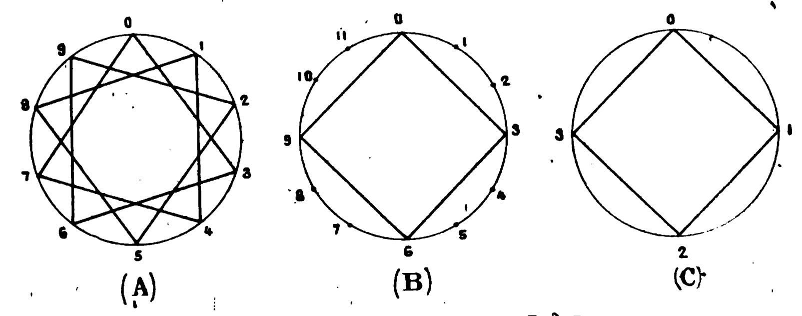


Fig. 8. — *Exemples de polygones* $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$.

(A) $\begin{cases} \delta = 3 \\ 2d = 10 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \delta = 9 \\ 2d = 12 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} \left(\frac{\delta}{\Delta}\right) = 3 \\ \left(\frac{2d}{\Delta}\right) = 4 \end{cases}$

N_δ sections, pour un mobile parcourant l'enroulement dans le sens du numérotage en partant de la lame et de la ligne neutre zéro, est déterminé par le polygone $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$.

Les valeurs de N_1 et N_δ sont respectivement :

$$N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d}.$$

(δ étant le nombre entier inférieur à $2d$ qui donne pour N_1 un nombre entier)

et $$N_\delta = (N_1 \mp 1)$$

(le signe de 1 étant l'inverse de celui de δ dans l'expression de N).

C. — **Pas des balais.**

Posons : $N_1 = mp + n$ avec $n < p$.

La progression, sur le collecteur, correspondant à N_1 sections est :

$$\boxed{\lambda_1 = \pm md + ny}$$

le signe de d étant le même que dans la formule : $y = \frac{N \pm d}{p}$.

La progression sur le collecteur pour $N_\delta = (N_1 \mp 1)$ sections est :

$$\boxed{\lambda_\delta = \lambda_1 \mp y}$$

le signe de y étant l'opposé de celui de d dans l'expression de λ_1.

λ_1 et λ_δ sont les PAS DES BALAIS.

Les pas λ_1 et λ_δ se succédant, évidemment, dans le même ordre que les dérivations de N_1 et N_δ sections, il y aura :

$(2d - \delta)$ pas égaux à λ_1
δ — à λ_δ

et *on obtiendra les emplacements de tous les balais en portant, bout à bout, les pas λ_1 et λ_δ dans l'ordre déterminé par le polygone* $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$.

Pour $\delta = 0$ le pas est unique et l'on a : $\lambda = \pm md + ny$.

Pour $\delta = \pm d$ il y a d pas λ_1 et d pas λ_δ.

Cette méthode est sensiblement plus rapide que la précédente.

Pour nous en assurer nous traiterons, par ce procédé, les huit exemples déjà donnés, en y joignant les quatre exemples suivants :

(9)	$p = 12$	$d = 5$	$N = 1783$	Enr[t] PRO.	Balais avant.	(BAV).
(10)	—	—	—	—	— arrière.	(BAR).
(11)	—	—	$N = 1771$	—	— avant.	(BAV).
(12)	—	—	—	—	— arrière.	(BAR).

D. — Applications des pas des balais.

$p = 6 \qquad d = 3$

ENROULEMENT PROGRESSIF

$N = 651 \qquad y = \frac{651 + 3}{6} = 109 \qquad \lambda_1 = 6\,m + 109\,n$

(1) BAV. $N_1 = \frac{651 + \delta}{6}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 109$

$m = 18 \qquad n = 3$

$\lambda_1 = 163$

$\lambda_\delta = 54$

Ordre $\left[\frac{3}{6}\right] = 1\delta 1\delta 1\delta$

(2) BAR. $N_1 = \frac{651 - \delta}{6}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 108$

$m = 18 \qquad n = 0$

$\lambda_1 = 54$

$\lambda_\delta = 163$

Ordre $\left[\frac{3}{6}\right] = 1\delta 1\delta 1\delta$

i	ORDRE	λ	L_i	i	ORDRE	λ	L_i
1	1	163	163	1	1	54	54
2	δ	54	217	2	δ	163	217
3	1	163	380	3	1	54	271
4	δ	54	434	4	δ	163	434
5	1	163	597	5	1	54	488
6	δ	54	651	6	δ	163	651

ENROULEMENT RÉTROGRADE

$N = 639 \qquad y = \frac{639 - 3}{6} = 106 \qquad \lambda_1 = -6m + 109\,n$

(3) BAV. $N_1 = \frac{639 + \delta}{6}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 107$

$m = 17 \qquad n = 5$

$\lambda_1 = 479$

$\lambda_\delta = 373$

Ordre $\left[\frac{3}{6}\right] = 1\delta 1\delta 1\delta$

(4) BAR. $N_1 = \frac{639 - \delta}{6}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 106$

$m = 17 \qquad n = 4$

$\lambda_1 = 373$

$\lambda_\delta = 479$

Ordre $\left[\frac{3}{6}\right] = 1\delta 1\delta 1\delta$

i	ORDRE	λ	L_i	i	ORDRE	λ	L_i
1	1	479	479	1	1	373	373
2	δ	373	213	2	δ	479	213
3	1	479	53	3	1	373	586
4	δ	373	426	4	δ	479	426
5	1	479	266	5	1	373	160
6	δ	373	0	6	δ	479	0

Les colonnes intitulées *ordre* indiquent l'ordre dans lequel se succèdent les pas λ_1 et λ_δ, le symbole 1 correspondant au pas λ_1 et le symbole δ au pas λ_δ.

$p = 6 \quad d = 9$

ENROULEMENT PROGRESSIF

$$N = 645 \qquad y = \frac{645 + 9}{6} = 109 \qquad \lambda_1 = 9\,m + 109\,n$$

(5) BAV. $N_1 = \dfrac{645 + \delta}{18}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 36$

$m = 6 \qquad n = 0$

$\lambda_1 = 54$

$\lambda_\delta = -55$

Ordre $\left[\dfrac{3}{18}\right] = 11111\delta$

(6) BAR. $N_1 = \dfrac{645 - \delta}{18}$

$\delta = 15 \qquad N_1 = 35$

$m = 5 \qquad n = 5$

$\lambda_1 = 590 = -55$

$\lambda_\delta = 54$

Ordre $\left[\dfrac{15}{18}\right] = 1\delta\delta\delta\delta\delta$

i	ORDRE	λ	L_i	i	ORDRE	λ	L_i
1	1	54	54	1	1	— 55	590
2	1	54	108	2	δ	54	644
3	1	54	162	3	δ	54	53
4	1	54	216	4	δ	54	107
5	1	54	270	5	δ	54	161
6	δ	— 55	215	6	δ	54	215
7	1	54	269	7	1	— 55	160
8	1	54	323	8	δ	54	214
9	1	54	377	9	δ	54	268
10	1	54	431	10	δ	54	322
11	1	54	485	11	δ	54	376
12	δ	— 55	430	12	δ	54	430
13	1	54	484	13	1	— 55	375
14	1	54	538	14	δ	54	429
15	1	54	592	15	δ	54	483
16	1	54	1	16	δ	54	537
17	1	54	55	17	δ	54	591
18	δ	— 55	0	18	δ	54	645

$p = 6 \quad d = 9$ (*Suite.*)

ENROULEMENT RÉTROGRADE

$$N = 645 \qquad y = \frac{645 - 9}{6} = 106 \qquad \lambda_1 = -9\,m + 106\,n$$

(7) BAV. $N_1 = \frac{645 + \delta}{18}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 36$

$m = 6 \qquad n = 0$

$\lambda_1 = -54$

$\lambda_\delta = -160$

Ordre $\left[\frac{3}{18}\right] = 11111\delta$

(8) BAR. $N_1 = \frac{645 - \delta}{18}$

$\delta = 15 \qquad N_1' = 35$

$m = 5 \qquad n = 5$

$\lambda_1 = -160$

$\lambda_\delta = -54$

Ordre $\left[\frac{15}{18}\right] = 1\delta\delta\delta\delta\delta$

i	ORDRE	λ	L_i	i	ORDRE	λ	L_i
1	1	— 54	591	1	1	— 160	485
2	1	— 54	537	2	δ	— 54	431
3	1	— 54	483	3	δ	— 54	377
4	1	— 54	429	4	δ	— 54	323
5	1	— 54	375	5	δ	— 54	269
6	δ	— 160	215	6	δ	— 54	215
7	1	— 54	161	7	1	— 160	55
8	1	— 54	207	8	δ	— 54	1
9	1	— 54	53	9	δ	— 54	592
10	1	— 54	644	10	δ	— 54	538
11	1	— 54	590	11	δ	— 54	484
12	δ	— 160	430	12	δ	— 54	430
13	1	— 54	376	13	1	— 160	270
14	1	— 54	322	14	δ	— 54	216
15	1	— 54	268	15	δ	— 54	162
16	1	— 54	214	16	δ	— 54	108
17	1	— 54	160	17	δ	— 54	54
18	δ	— 160	645	18	δ	— 54	0

$p = 12 \qquad d = 5$

ENROULEMENT PROGRESSIF

$N = 1783 \qquad y = \frac{1783 + 5}{12} = 149 \qquad \lambda_1 = 5\,m + 149\,n$

(9) BAV $N_1 = \frac{1783 + \delta}{10}$

$\delta = 7 \qquad N_1 = 179$
$m = 14 \qquad n = 11$
$\lambda_1 = 1709 = -74$
$\lambda_\delta = -223$

Ordre $\left[\frac{7}{10}\right]$ = 1δδ1δδ1δδδ

(10) BAR $N_1 = \frac{1783 - \delta}{10}$

$\delta = 3 \qquad N_1 = 178$
$m = 14 \qquad n = 10$
$\lambda_1 = 1560 = -223$
$\lambda_\delta = -74$

Ordre $\left[\frac{3}{10}\right]$ = 111δ11δ11δ

i	ORDRE	λ	L_i	*i*	ORDRE	λ	L_i
1	1	— 74	1 709	1	1	— 223	1 560
2	δ	— 223	1 486	2	1	— 223	1 337
3	δ	— 223	1 263	3	1	— 223	1 114
4	1	— 74	1 189	4	δ	— 74	1 040
5	δ	— 223	966	5	1	— 223	817
6	δ	— 223	743	6	1	— 223	594
7	1	— 74	669	7	δ	— 74	520
8	δ	— 223	446	8	1	— 223	297
9	δ	— 223	223	9	1	— 223	74
10	δ	— 223	0	10	δ	— 74	0

ENROULEMENT PROGRESSIF

$N = 1771 \qquad y = \frac{1771 + 5}{12} = 148 \qquad \lambda_1 = 5\,m + 148\,n$

(11) $N_1 = \frac{1771 + \delta}{10}$

$\delta = 9 \qquad N_1 = 178$
$m = 14 \qquad n = 10$
$\lambda_1 = 1550 = -221$
$\lambda_\delta = -369$

Ordre $\left[\frac{9}{10}\right]$ = 1δδδδδδδδδ

(12) $N_1 = \frac{1771 - \delta}{10}$

$\delta = 1 \qquad N_1 = 177$
$m = 14 \qquad n = 9$
$\lambda_1 = 1402 = -369$
$\lambda_\delta = -221$

Ordre $\left[\frac{1}{10}\right]$ = 111111111δ

i	ORDRE	λ	L_i	*i*	ORDRE	λ	L_i
1	1	— 221	1 550	1	1	— 369	1 402
2	δ	— 369	1 181	2	1	— 369	1 033
3	δ	— 369	812	3	1	— 369	664
4	δ	— 369	443	4	1	— 369	295
5	δ	— 369	74	5	1	— 369	1 697
6	δ	— 369	1 476	6	1	— 369	1 328
7	δ	— 369	1 107	7	1	— 369	959
8	δ	— 369	738	8	1	— 369	590
9	δ	— 369	369	9	1	— 369	221
10	δ	— 369	0	10	δ	— 221	0

§ 4. — Enroulements et commutations symétriques

Un enroulement est symétrique lorsque toutes ses dérivations sont identiques, c'est-à-dire lorsque :

$$N_1 = \frac{N}{2d} \cdot$$

Dans ce cas on a : $\delta = 0$ et *tous les pas des balais sont égaux* entre eux. (V. p. 25.)

En outre N étant pair, *y est impair* et *p est un multiple impair de d* [Chap. I, § 3, p. 15].

On ne peut donc pas réaliser un enroulement symétrique lorsque *p* est inférieur à *d* ou un multiple pair de *d*; mais il n'est pas indispensable que l'enroulement soit symétrique. Ce qui importe c'est que la commutation soit symétrique et pour cela, ainsi que nous le verrons plus loin [Chap. VII, § 5, p. 75], il suffit que *p* soit un *multiple quelconque* (*pair ou impair*) *de d* ou que *d* soit un *multiple de p*.

Il en résulte que *les enroulements en séries parallèles, proprement dits* ($1 < d < p$) *ne sont applicables* d'une façon rationnelle que dans les cas suivants :

$p = 4$	$d = 2$	$p = 12$	$d = 2$, 3, 4 ou 6
$p = 6$	$d = 2$ ou 3	$p = 14$	$d = 2$ ou 7
$p = 8$	$d = 2$ ou 4	$p = 16$	$d = 2$, 4 ou 8
$p = 9$	$d = 3$	$p = 18$	$d = 2$, 3, 6 ou 9.
$p = 10$	$d = 2$ ou 5		

CHAPITRE III

SECTIONS EN COURT-CIRCUIT

1° Commutation normale.
   A. Diagrammes circulaires.
   B. Diagrammes rectilignes.
2° Commutations anormales.
   A. Balais dans la même région.
   B. Balais également répartis dans toutes les régions.

Connaissant les emplacements de tous les balais on connaît, en particulier, ceux des balais de même signe, et on déduit de ces derniers les SECTIONS EN COURT-CIRCUIT OU SECTIONS COMMUTÉES.

Nous appellerons SENS DIRECT et nous désignerons par *RD*, le sens de la rotation de l'induit pour lequel les lames du collecteur se succèdent, sous les balais, dans le sens du numérotage (fig. 9) ; nous appellerons SENS INVERSE et nous désignerons par *RI*, le sens de rotation inverse du précédent.

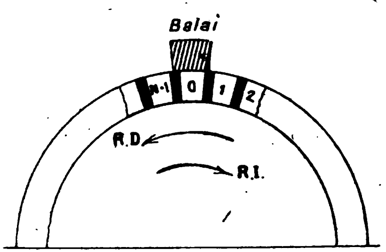


Fig. 9. — *Sens de rotation.*
R.D. Rotation directe. — R.I. Rotation inverse.

Il est utile de représenter les sections en court-circuit par des DIAGRAMMES.

Nous aurons recours à deux sortes de diagrammes, les uns CIRCULAIRES, dans lesquels les lames du collecteur sont représentées autour de l'axe de l'induit, les autres RECTILIGNES, dans lesquels ces mêmes lames sont figurées en ligne droite suivant le développement rectiligne du profil du collecteur.

Les balais rencontrés par un mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement, sont alternativement positifs et négatifs, les balais de rang pair étant positifs ou négatifs suivant que le balai zéro (celui d'où part le mobile) est lui-même positif ou négatif.

Pour fixer les idées, *nous supposerons la ligne neutre zéro choisie de telle façon que le balai zéro et, par suite aussi, tous les balais pairs soient positifs.*

§ 1. — Commutation normale

La commutation est normale lorsque tous les balais, tant positifs que négatifs, occupent les positions déterminées par la formule générale des balais :

$$L_i = \pm m_i d + n_i y$$

ou, ce qui revient au même, par les pas λ, λ_δ portés bout à bout dans l'ordre déterminé par le polygone : $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$.

A. — **Diagrammes circulaires.**

Figurons, sur le pourtour du collecteur (fig. 10 et 11), les lames qui doivent recevoir des BALAIS D'UN SIGNE DONNÉ, représentons, en outre, à côté de chacune de ces lames, *celle qui la précède immédiatement dans le sens de la rotation de l'induit* et figurons les différents balais, au moment où ils se trouvent, à cheval sur la lame qui leur est propre et sur celle qui la précède. Représentons enfin, de la façon indiquée par la figure 6 (p. 9), toutes les sections qui seraient traversées par un mobile, en passant d'un balai quelconque au suivant. Ces sections seront, évidemment, groupées en série et mises en court-circuit, par les deux balais qui les encadrent, *à condition que ceux-ci soient réunis entre eux par une connexion extérieure.*

Le diagramme que nous venons de définir est un DIAGRAMME CIRCULAIRE.

Les figures 10 et 11 donnent des exemples de ces diagrammes, pour :

$p = 6$ $d = 3$	(Exemples 1 à 4).

On comparera, entre eux, les différents diagrammes ainsi obtenus.

Les flèches indiquent les lames du collecteur déterminées par la formule des balais ou le pas des balais.

p étant un multiple pair de d, il en résulte (v. p. 15) que les *balais positifs*, qui sont ici les *balais pairs*, sont *à cheval* sur les lignes neutres, alors que les balais négatifs sont en avant ou en arrière.

La figure 10, se rapporte à l'ENROULEMENT PROGRESSIF des exemples 1 et 2 dans lesquels :

$$y = \frac{651 + 3}{6}.$$

Les figures 10 *A* et 10 *B* sont les diagrammes des sections commutées par les *balais positifs* (BAC) avec *rotation directe* et *rotation inverse*.

Les figures 10 *C* et 10 *D* sont les diagrammes des sections commutées par les *balais négatifs* de l'exemple 1 (BAV) avec *rotation directe* et de l'exemple 2 (BAR) avec *rotation inverse*.

La figure 11 se rapporte à l'ENROULEMENT RÉTROGRADE des exemples 3 et 4 dans lesquels :

$$y = \frac{649 - 3}{6}.$$

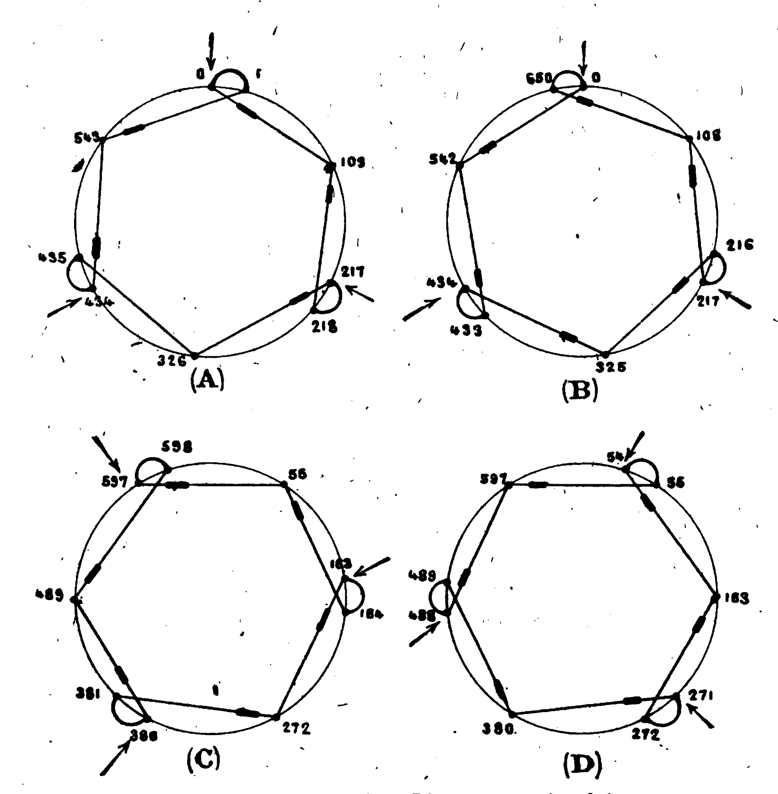
Les figures 11 *A* et 11 *B* indiquent les sections commutées par les *balais positifs* (BAC), avec *rotation directe* et *rotation inverse*.

B. — Diagrammes rectilignes.

Lorsque le nombre des pôles est important il est plus expéditif de faire usage de DIAGRAMMES RECTILIGNES.

Les exemples représentés (fig. 12) se rapportent tous aux *balais positifs* d'enroulements *progressifs*.

La figure 12 *A* est le diagramme des exemples 1 et 2 [$p = 6$ $d = 3$ $N = 651$] (BAC).



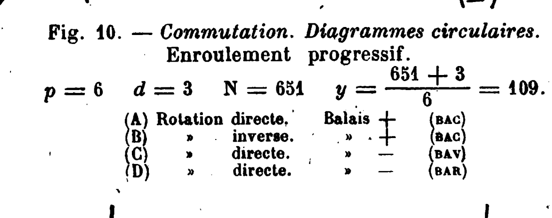


Fig. 10. — *Commutation. Diagrammes circulaires.*
Enroulement progressif.

$$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651 \quad y = \frac{651 + 3}{6} = 109.$$

(A) Rotation directe. Balais + (BAC)
(B) » inverse. » + (BAC)
(C) » directe. » — (BAV)
(D) » directe. » — (BAR)

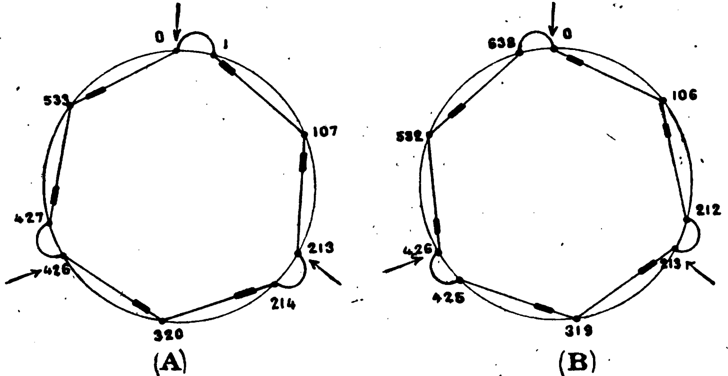


Fig. 11. — *Commutation. Diagrammes circulaires.*
Enroulement rétrograde.

$$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 639 \quad y = \frac{639 - 3}{6} = 106.$$

(A) Rotation directe. Balais + (BAC)
(B) » inverse. » + (BAC).

La figure 12 *B* est le diagramme de l'exemple 5 [$p = 6 \quad d = 9 \quad N = 645$]. (BAV).

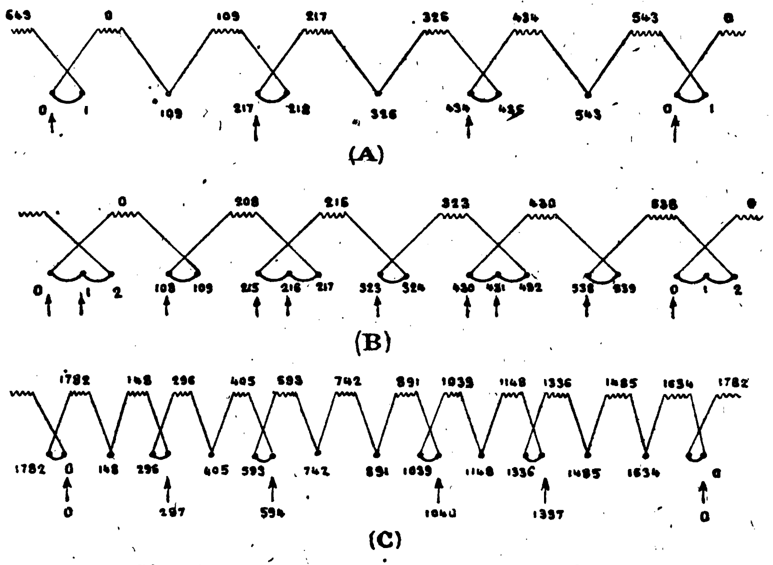


Fig. 12. — *Commutation. Diagrammes rectilignes.* Enroulements progressifs.

(A) $p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651 \quad y = \frac{651 + 3}{6} = 109$ — R.D. — Balais + (BAC)

(B) $p = 6 \quad d = 9 \quad N = 645 \quad y = \frac{645 + 9}{6} = 109$ R.D. Balais + (BAV)

(C) $p = 12 \quad d = 5 \quad N = 1783 \quad y = \frac{1783 + 15}{12} = 149$ R.I. Balais + (BAR)

La figure 12 *C* est le diagramme de l'exemple 10 [$p = 12 \quad d = 5 \quad N = 1783$]. (BAR). (*Rotation inverse*).

§ 2. — Commutations anormales

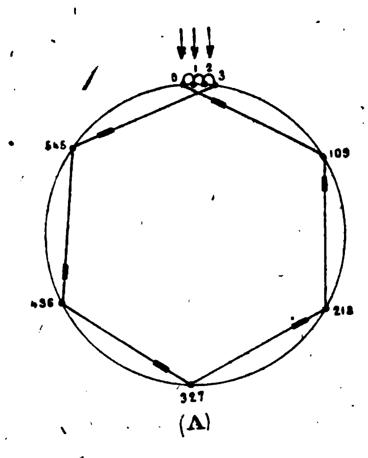
Lorsqu'on donne aux balais des positions autres que les positions normales résultant de la formule, on modifie par cela même, soit le groupement des sections en court-circuit, soit à la fois leur groupement et leur nombre. La commutation correspondante sera dite *anormale*.

A. — Balais dans la même région.

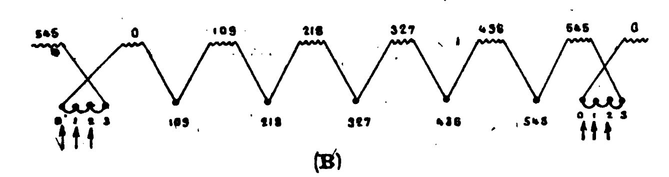
Il est intéressant de noter que *si on dispose les d balais de même signe, côte à côte dans une même région neutre, les*

sections mises en court-circuit par ces balais sont groupées **EN SÉRIE**, comme dans un enroulement série.

La figure 13 en donne un exemple, pour l'enroulement des exemples 1 et 2 [$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651$].



(A)



(B)

Fig. 13. — *Commutation. Balais dans la même région.*

$$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651 \quad y = \frac{651 + 3}{6} = 109 \quad \text{Balais} +$$

(A) Diagramme circulaire. — (B) Diagramme rectiligne.

Cette disposition est rarement adoptée en pratique.

B. — **Balais également répartis dans toutes les régions.**

On obtient la mise en court-circuit INDIVIDUELLE *de toutes les sections commutées, en plaçant des balais dans toutes les régions.*

La figure 14 indique cette disposition pour le même enroulement que précédemment.

On remarquera que chaque balai supplémentaire occasionne la mise en court-circuit d'une section suplémentaire.

Dans l'exemple envisagé on a :

		SECTIONS EN COURT-CIRCUIT				
Commutation normale. .	0	109	217	326	434	543
Balais également répartis.	0	108 / 109	217	325 / 326	434	542 / 543

Les sections supplémentaires sont les sections : 108, 325, 542.

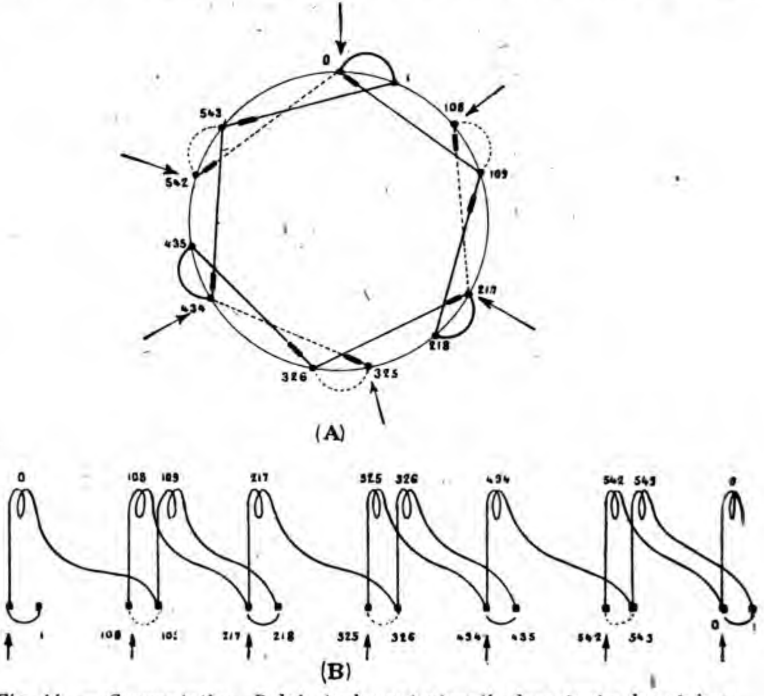


Fig. 14. — *Commutation. Balais également répartis dans toutes les régions.*

$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651 \quad y = \frac{651 + 3}{6} = 109$ Balais +

(A) Diagramme circulaire. — (B) Diagramme rectiligne.

On remarquera également que la durée du court-circuit des sections : $\left\{ \begin{matrix} 108 & 325 & 542 \\ 109 & 326 & 543 \end{matrix} \right\}$ est supérieure à celle du court-circuit des sections 0,217 et 434, de sorte que la symétrie de la commutation est rompue et que cette solution, fréquemment adoptée, peut n'être pas toujours la meilleure.

CHAPITRE IV

ENROULEMENTS LES PLUS USUELS

1° Enroulements série.
2° Enroulements parallèles.

Les enroulements les plus usuels sont les *enroulements série* et les *enroulements parallèles étoilés*.

1° Enroulements série

Les enroulements série dont le nombre des circuits est égal à *deux* quel que soit le nombre des pôles et qui, nous l'avons dit, sont antérieurs à la formule d'Arnold, peuvent être considérés comme un cas particulier des enroulements série parallèles, obtenu en faisant $d = 1$ dans la formule générale d'où :

$$y = \frac{N \pm 1}{p}$$

Ils partagent avec les enroulements ordinaires cette propriété qui les distingue de tous les autres, que *les sections commutées sont mises en court-circuit par un seul balai.*

Exemple (**13**).

La figure 15 *A* est le diagramme de l'enroulement série : $p = 3 \quad d = 1 \quad N = 230 \quad y = \frac{230 + 1}{3} = 77.$

$\frac{N}{2} = 115$. L'enroulement est symétrique. $m = 38 \quad n = 1$ $\lambda = 115$.

On voit que le balai à cheval sur les lames 0 et 1 met en court-circuit les sections :

0 77 154

groupées en série.

La figure 15 *B* est le diagramme du même enroulement avec un balai dans chaque région. Les deux balais supplémentaires

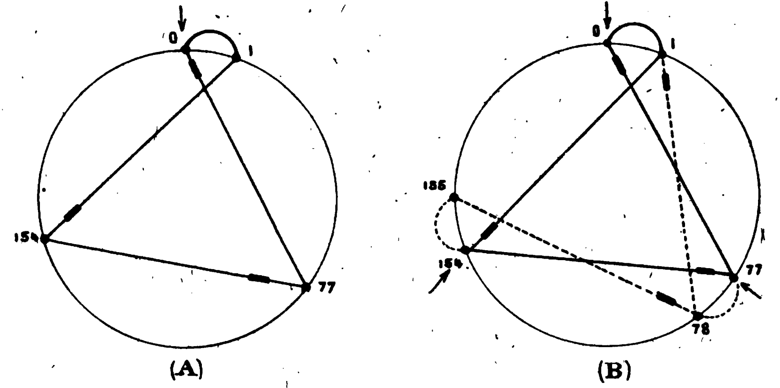


Fig. 15. — *Enroulement série.*

$$p = 3 \quad d = 1 \quad N = 230 \quad y = \frac{230 + 1}{3} = 77$$

(A) Commutation normale. — (B) Balais également répartis dans toutes les régions.

provoquent la mise en court-circuit des deux sections supplémentaires :

1 et 78

et la durée du court-circuit de la section 154 est moindre que celle du court-circuit de toutes les autres sections.

2° Enroulements parallèles étoilés

On obtient un enroulement ayant un nombre de circuits égal à celui des pôles, c'est-à-dire un ENROULEMENT PARALLÈLE en faisant $d = p$ dans la formule générale : ce qui donne :

$$\boxed{y = \frac{N}{p} \pm 1}$$

Cet enroulement, qui est ÉTOILÉ, présente sur les enroulements ordinaires l'avantage que les sections, constituant une même dérivation, au lieu d'être toutes situées dans le même champ, sont également réparties entre tous les champs de même polarité, ce qui a pour effet d'éviter les différences de force élec-

tromotrice qui, dans les enroulements ordinaires, peuvent se produire d'une dérivation à l'autre du fait d'une aimantation inégale des pôles.

Les sections commutées sont mises en court-circuit, individuellement, comme dans les enroulements ordinaires, mais, une section quelconque, au lieu d'être mise en court-circuit par

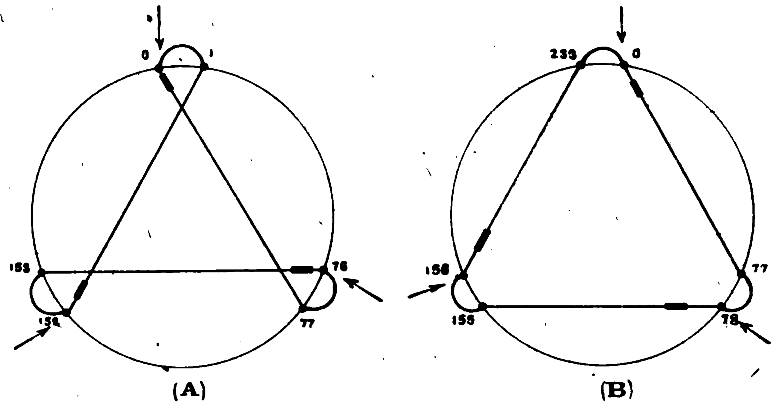


Fig. 16. — *Enroulement parallèle étoilé.*
$p = d = 3.$

(A) Enroulement PRO. $N = 228$ $y = \frac{228}{3} + 1 = 77$ R.D.

(B) Enroulement RETRO. $N = 234$ $y = \frac{234}{3} - 1 = 77$ R.I.

un même balai, est mise en court-circuit par l'*ensemble de deux balais, réunis entre eux par une* CONNEXION EXTÉRIEURE, ainsi que cela se produit dans tous les enroulements étoilés.

Nous en donnerons deux exemples.

Exemple (**14**).

La figure 16 *A* est le diagramme de l'*enroulement progressif* :

$$\boxed{p = d = 3}$$

$$N = 228 \qquad y = \frac{228}{3} + 1 = 77$$

Emplacements des balais.

On a : $\frac{N}{2d} = \frac{228}{6} = 38.$ L'enroulement est symétrique.

$m = 12 \qquad n = 2 \qquad \lambda = (3 \times 12) + (2 \times 77) = 190 = -38$

$i =$	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$L_i =$	190.	152.	114.	76.	38.	0.
		+		+		+

Exemple (15).

La figure 16 *B* est le diagramme de l'enroulement *rétrograde* :

$$\boxed{p = d = 3}$$

$$N = 234 \quad y = \frac{234}{3} - 1 = 77$$

Emplacements des balais.

$$\frac{N}{2d} = \frac{234}{6} = 39$$

$m = 12$ $n = 3$ $\lambda = -(3 \times 12) + (3 \times 77) = 195 = -39$

$i =$	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$L_i =$	195.	156.	117.	78.	39.	0.
		+		+		+

CHAPITRE V

PROBLÈME INVERSE

1° Nombre des sections comprises entre deux lames quelconques du collecteur.
2° Résistance correspondante.

Nous savons déterminer la progression, sur le collecteur, correspondant à un nombre quelconque de sections. Traitons le problème inverse et demandons-nous quel est le nombre des sections, comprises entre deux lames quelconques du collecteur. Nous en déduirons la résistance de l'induit entre ces deux lames.

1° Nombre des sections comprises entre deux lames quelconques du collecteur

Considérons deux lames quelconques du collecteur.

Donnons à l'une le numéro *zéro* et soit L le numéro correspondant de l'autre.

Un mobile parcourant l'enroulement, en partant de la lame zéro, pourra atteindre la lame L par deux voies différentes.

Ces deux voies, dans l'enroulement de la figure 17, sont : OABL et OB'CL. L'enroulement représenté est un enroulement ordinaire, mais le raisonnement s'applique à un enroulement fermé quelconque.

Soit M le nombre des sections traversées par le mobile en suivant l'une des voies, le nombre des sections qu'il traversera en suivant l'autre sera : $M' = N - M$.

M étant le nombre des sections traversées dans le sens du numérotage, posons :

$$M = mp + n \qquad n < p$$

la progression correspondante sur le collecteur a pour expression :

$$L = \pm md + ny.$$

M, m, et n sont inconnus.

Mettons cette relation sous la forme :

$$m = \pm \frac{L - ny}{d}$$

(le signe du second membre est celui de d dans la formule : $y = \frac{N \pm d}{p}$) et donnons à n les valeurs croissantes : 1. 2. 3...

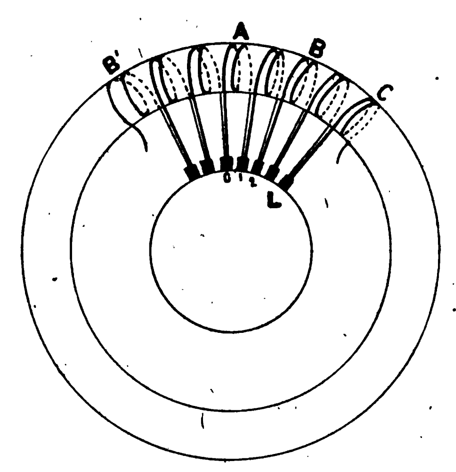


Fig. 17. — *Résistance comprise entre deux lames quelconques du collecteur.*

jusqu'à ce que nous obtenions, pour m, un nombre entier et portons, dans l'expression de M, les valeurs ainsi trouvées pour m et n. Le problème sera résolu.

Exemple :

Cherchons le nombre des sections comprises entre deux lames consécutives de l'enroulement, de l'*exemple* 1 :

$$p = 6 \qquad d = 3 \qquad N = 651 \qquad y = \frac{651 + 3}{6} = 109$$

nous aurons : $L = 1$

d'où $$m = \frac{1 - 109\,n}{3}$$

$n = 1$ donne $m = -36$ et $M = -(36 \times 6) + 1 = -215$ ou $+436$.

Les deux dérivations comprises entre deux lames consécutives contiennent donc respectivement :

$$M = 436$$
$$M' = N - M = 215 \text{ sections.}$$

2° Résistance correspondante

Soient r la résistance d'une section, R_L la résistance de l'induit entre les lames *zéro* et L. On a :

$$R_L = \frac{MM'}{M + M'}\,r = \frac{MM'}{N}\,r = M\left(1 - \frac{M}{N}\right) r = M'\left(1 - \frac{M'}{N}\right) r.$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent :

On a : $L = 1 \quad M' = 215, \quad N = 651 \quad \frac{M'}{N} = \frac{215}{651} = 0.33$

d'où $$R_1 = 215 \times 0{,}67\,r = 144\,r.$$

CHAPITRE VI

TABLEAUX GÉNÉRAUX DES BALAIS

1° Emplacements des balais dans l'ordre naturel.
2° Etude du cas où y est impair.
A. Formule des balais dans l'ordre naturel.
B. Principe des tableaux généraux.
C. Pas des balais dans l'ordre naturel.
D. Applications. (Exemples de tableaux généraux.)
3° Etude du cas où y est pair.
A. Formule et pas des balais dans l'ordre naturel.
B. Applications. (Exemples de tableaux généraux.)

1° Emplacements des balais dans l'ordre naturel

Nous avons appris (chap. II) à déterminer les emplacements des balais, dans l'ordre où ils se présenteraient à un mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement. La méthode indiquée suppose la connaissance du nombre des sections ou des lames du collecteur et nécessite, dans chaque cas particulier, l'établissement d'un tableau spécial pour les balais.

En considérant les balais, comme nous allons le faire à présent, dans l'ordre où ils seraient rencontrés par un mobile faisant le tour du collecteur, ordre que nous appellerons l'ORDRE NATUREL, on est conduit à des TABLEAUX GÉNÉRAUX *indépendants du nombre des lames du collecteur* s'appliquant à toutes les machines ayant même nombre de pôles et même nombre de circuits, machines que nous dirons appartenir à la même CLASSE.

Transformons l'expression :

$$N_i = \frac{iN \pm \delta_i}{2d} \qquad \text{dans laquelle} \qquad \delta_i < 2d$$

de façon à la mettre directement sous la forme : $mp + n$.

A cet effet remplaçons N par $(py \mp d)$ d'où :

$$N_i = \frac{i(py \mp d) \pm \delta_i}{2d}.$$

puis, ajoutons et retranchons $p\gamma_i$ au numérateur, il vient, en ordonnant :

$$N_i = p\,\frac{iy - \gamma_i}{2d} + \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_i p \pm \delta_i}{d} \mp i\right].$$

Prenons pour γ_i le *nombre entier inférieur à 2d,* donnant un nombre entier pour :

$$m_i = \frac{iy - \gamma_i}{2d}.$$

Posons ensuite : $\alpha_i = \dfrac{\gamma_i p \pm \delta_i}{d}$

ainsi que : $n_i = \dfrac{1}{2}(\alpha_i \mp i)$

il vient : $N_i = m_i p + n_i.$

L'emplacement du balai i sera donné par la formule :

$$L_i = \pm m_i d + n_i y = \pm\left(\frac{iy - \gamma_i}{2}\right) + \left(\frac{\alpha_i \mp i}{2}\right) y$$

d'où : $\boxed{L_i = \dfrac{1}{2}[\alpha_i y \mp \gamma_i]}$

avec $\boxed{\alpha_i = \dfrac{\gamma_i p \pm \delta_i}{d}}$

Il est aisé de voir que α_i *est le numéro d'ordre de la région neutre qui contient le* i^{me} *balai, rencontré par le mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement* dans le sens du numérotage, en partant de la lame et de la région zéro.

En effet, on a :

$$L_i = \frac{1}{2}\left[\alpha_i\,\frac{N \pm d}{p} \mp \gamma_i\right] = \alpha_i\frac{N}{2p} \pm \frac{1}{2}\left[\alpha_i\,\frac{d}{p} - \gamma_i\right] = \alpha_i\,\frac{N}{2p} \pm \frac{\delta_i}{2p}$$

d'où : $L_i - \alpha_i\,\dfrac{N}{2p} = \pm\,\dfrac{\delta_i}{2p}.$

$\dfrac{\delta_i}{2p}$ est affecté du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que : d dans $y = \dfrac{N \pm d}{p}$ et δ dans $N_i = \dfrac{N \pm \delta}{2d}$ sont de même signe ou de signe contraire.

L_i est l'angle que fait avec l'origine, l'axe de la lame L_i ;

$\alpha_i \frac{N}{2p}$ est l'angle que fait avec l'origine, la ligne neutre dont le numéro d'ordre est α_i.

$\pm \frac{\delta_i}{2p}$ est donc l'angle que fait l'axe de la lame L_i avec la ligne neutre α_i et comme cet angle est petit, le balai i qui repose sur la lame L_i se trouve nécessairement placé dans la région α_i.

Nous aurons par suite les *balais dans l'ordre naturel*, si nous les rangeons dans l'*ordre des valeurs croissantes de* α_i, et comme α_i (d'après son expression ci-dessus) varie dans le même sens que γ_i, nous pouvons aussi, pour avoir les balais dans l'ordre naturel, donner à γ_i, dans l'ordre croissant, toutes les valeurs qu'il est susceptible de prendre et calculer les valeurs correspondantes de α_i et de L_i.

Or, d'après la définition de γ_i, les valeurs successives de ce terme pour $i = 1.2.3\ldots 2d$ sont les numéros d'ordre des sommets atteints successivement par un mobile parcourant le polygone : $\left[\frac{\gamma}{2d}\right]$ γ désignant la valeur que prend γ_i pour $i = 1$, valeur qui est déterminée par la relation :

$$m_1 = \frac{y - \gamma}{2d}.$$

Cette relation montre :

que : *d premier avec y est premier avec* γ

et que : γ *a même parité que y.*

Il en résulte que :

Lorsque y est IMPAIR, γ à la fois impair et premier avec d est aussi premier avec $2d$; dans ce cas, le polygone $\left[\frac{\gamma}{2d}\right]$ a $2d$ *sommets* et les valeurs successives de γ pour $i = 1.2.3\ldots 2d$ sont ces mêmes valeurs : $1.2.3\ldots 2d$, dans un autre ordre.

Lorsqu'au contraire y est PAIR, γ qui est également pair, a avec $2d$ le plus grand commun diviseur 2 et le polygone n'a que d sommets. Dans ce cas, lorsqu'on donne à i les valeurs : $1.2\ldots d$ γ_i prend, dans l'ordre déterminé par le parcours du polygone, les valeurs paires $2.4.6\ldots 2d$, puis, quand on donne à i les valeurs $(d+1)$ $(d+2)\ldots(2d)$, γ_i repasse une seconde fois par les mêmes valeurs paires $2.4.6\ldots 2d$ et dans le même ordre.

A chacune des valeurs de γ_i correspondent donc *deux* valeurs de i, différant entre elles de d, ayant par suite des parités différentes (puisque d premier avec y est impair) et déterminant, en conséquence, deux balais de signes contraires.

Il s'ensuit que, si l'on donne à γ_i, dans l'ordre croissant, les d valeurs paires 2.4.6... $2d$, on aura chaque fois un balai positif et un balai négatif, de sorte que l'*on obtiendra ainsi, séparément, dans l'ordre naturel, d'une part les balais positifs, d'autre part les balais négatifs.*

Nous étudierons, successivement, le cas où y est impair et celui où il est pair.

2° Étude du cas où y est impair

A. — Formule des balais.

y étant IMPAIR, γ_i peut prendre, nous venons de le voir, toutes les valeurs paires ou impaires comprises entre 1 et $2d$.

Posons :

$$\gamma_i = j$$
$$\delta_{ii} = \varepsilon_j$$
$$\alpha_i = \beta_j$$

nous aurons la double relation :

$$\boxed{L_j = \frac{1}{2}\,[\beta_j y \mp j]}$$

$$\boxed{\beta_j = \frac{jp \pm \varepsilon_j}{d}}$$

Pour avoir les balais, dans l'ordre naturel, nous devons donner à j, devenu la variable indépendante, les valeurs croissantes 1. 2. 3... $2d$ et calculer les valeurs correspondantes de β_j et de L_j.

Pour calculer les valeurs de β_j nous devons connaître celles de ε_j, or nous nous heurtons à une indétermination apparente car $\varepsilon_j = \delta_i$ n'est assujetti qu'à la condition d'être inférieur à $2d$, alors qu'il existe *deux* nombres entiers inférieurs à $2d$, qui substitués à ε_j donnent pour β_j un nombre entier.

L'indétermination disparaît si l'on remarque que :

α_i numéro d'ordre de la région qui contient le i^{me} balai rencontré par le mobile, *a même parité que i.*

γ_i défini par la condition de donner un nombre entier pour : $\left(m_i = \frac{iy - \gamma_i}{2d}\right)$ *a aussi même parité que i.*

de sorte que :

α_i et γ_i *ont même parité.*

$\beta_j = \alpha_i$ *doit donc avoir même parité que :* $j = \gamma_i$ *et l'on doit, en conséquence, prendre celle des deux valeurs de* ε_j *inférieures à* $2d$, *qui donne pour* β_j *un nombre entier de même parité que* j.

Désignons par β et par ε les valeurs de β_j et ε_j pour $j = 1$ d'où :

$$\boxed{\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}}$$

ε est le *nombre entier inférieur à* $2d$ *qui donne pour* β *un nombre entier* IMPAIR.

Remarque 1. — Les valeurs de ε_j *qui satisfont à la condition ci-dessus, de donner pour* β_j *des nombres entiers de même parité que* j, *sont les numéros d'ordre des sommets atteints, successivement, en traçant le polygone* $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$

Traçons, en effet, ce polygone, le sommet auquel aboutit le j^{me} côté a pour numéro d'ordre ε_j et (ainsi qu'il a été expliqué au chap. II § 3, B, p. 22) le nombre de tours de circonférence complets, effectués au moment où l'on atteint le sommet ε_j est :

$$q_j = \frac{j\varepsilon - \varepsilon_j}{2d}.$$

Or on a identiquement :

$$\beta_j = j\,\frac{p \pm \varepsilon}{d} \mp 2\,\frac{j\varepsilon - \varepsilon_j}{2d}$$

le signe du second terme du deuxième membre étant l'inverse du signe de ε dans le premier terme.

Si nous portons dans cette expression les valeurs de ε_i résultant du tracé du polygone, nous aurons :

$$\beta_j = j\beta \mp 2q_j$$

$2q_j$ étant un nombre entier pair et β un nombre entier im-

pair, β_j aura toujours même parité que j et par conséquent les valeurs de ε_j qui donnent pour β_j des nombres de même parité que j sont bien celles déterminées par le polygone : $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$.

Remarque 2. — Quand on donne à j les valeurs : 1. 2... ($2d$) j est alternativement impair et pair, il en est donc de même de β_j et par conséquent : *lorsque* y *est impair,* comme nous le supposons, *les balais, dans l'ordre naturel, sont alternativement positifs et négatifs, les balais pairs ayant le signe du balai initial zéro.*

Remarque 3. — *Un mobile, se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement, rencontre les balais dans l'*ORDRE NATUREL, *lorsque* $i = j = \gamma_j$

d'où :
$$m_i = i\left(\frac{y-1}{2d}\right)$$

dans ce cas : $(y - 1)$ *est divisible par* $2d$.

En outre : $L_i = L_j$ donne :

$$\frac{\gamma_i p \pm \delta_i}{2d}\, y \mp \gamma_i = \frac{jp \pm \varepsilon_j}{2d}\, y \mp j$$

d'où : $\delta_i = \varepsilon_j$ et pour $i = j = 1$ on a $\varepsilon = \delta$.

*Le mobile rencontre les balais dans l'*ORDRE NATUREL INVERSÉ, *lorsque :*

$$i = (2d - j) \quad \text{d'où} \quad (2d - i) = j = \gamma_i$$

et
$$m_i = \frac{iy - (2d - i)}{2d} = i\left(\frac{y+1}{2d}\right) - 1$$

dans ce cas $(y + 1)$ *est divisible par* $2d$.

On a aussi : $L_i = L_j = L_{2d-i}$ qui donne :

$$\frac{\gamma_i p \pm \delta_i}{2d}\, y \mp \gamma_i = \frac{(2d - i)p \pm \varepsilon_{2d-i}}{2d}\, y \mp \varepsilon_{2d-i}$$

d'où : $\delta_i = \varepsilon_{2d-i} = -\varepsilon_i$ et pour $i = 1$ on a : $\varepsilon = -\delta$

En résumé : lorsque $(y - 1)$ est divisible par $2d$, le mobile se déplaçant à l'intérieur de l'induit rencontre les balais dans l'ordre naturel; lorsque $(y + 1)$ est divisible par $2d$, il les rencontre dans le même ordre pris en sens inverse ; dans tous les autres cas, il les rencontre dans un ordre différent de l'ordre naturel.

B. — Principe des tableaux généraux.

Dans la double relation qui détermine les emplacements des balais, dans l'ordre naturel savoir :

$$L_j = \frac{1}{2}[\beta_j y \mp j]$$

$$\beta_j = \frac{jp \pm \varepsilon_j}{d}$$

β_j ne dépend que de p et de d
L_j ne dépend que de β_j et de y.

Les valeurs de β_j *sont donc les mêmes, pour toutes les machines ayant même nombre de pôles et même nombre de circuits. Elles sont indépendantes du nombre des sections et du pas* y *de l'enroulement.*

Pour des valeurs données de p et de d on peut calculer, à l'avance, les valeurs de β_j et dresser, en même temps, le TABLEAU GÉNÉRAL DES EMPLACEMENTS DES BALAIS ; tableau qui s'appliquera à toutes les machines de la classe considérée, quel que soit le nombre de leurs sections.

Exemple.

Classe : $p = 5 \quad d = 2$

$$\beta_j = \frac{5_j + \varepsilon_j}{2}$$

j	ε_j	β_j	L_j
1	1	3	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$
2	2	6	$\frac{1}{2}[6y \mp 2]$
3	3	9	$\frac{1}{2}[9y \mp 3]$
4	0	0	$\frac{1}{2}[10y \mp 4] = 0.$

C. — Pas des balais.

Le calcul des emplacements peut encore être notablement simplifié par la considération des PAS DES BALAIS, comme dans

le cas des balais pris dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement. [Chap. II, § 3, C, p. 25.]

Le nombre des lames comprises entre deux balais consécutifs $(j - 1)$ et j est :

$$l_j = L_j - L_{j-1} = \frac{1}{2}[(\beta_j - \beta_{j-1})\, y \mp 1].$$

Posons : $$b_j = (\beta_j - \beta_{j-1})$$

il vient : $$\boxed{l_j = \frac{1}{2}[b_j y \mp 1]}$$

Or nous venons de voir (p. 49) que : $\beta_j = j\beta \mp 2q_j$

d'où : $$b_j = \beta \mp 2\,(q_j - q_{j-1})$$

q_j étant (ainsi qu'il a été dit au § 2, A. Rem. I du présent chapitre, p. 49) le nombre de tours complets de circonférence, effectués quand on atteint le sommet ε_j du polygone $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$, il en résulte que, lorsque j varie de 1 à $2d$, la différence $(q_j - q_{j-1})$ prend, dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$, $(2d - \varepsilon)$ fois la valeur *zéro* et ε fois la valeur *un* ; b_j prend en même temps les valeurs respectives, β et $(\beta \mp 2)$ et par conséquent l_j prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$:

$(2d - \varepsilon)$ fois la valeur : $l_1 = \frac{1}{2}[\beta y \mp 1]$ avec $\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}$

ε — — $l_2 = \frac{1}{2}[(\beta \mp 2)\, y \mp 1]$

l_1 et l_2 sont les PAS DES BALAIS DANS L'ORDRE NATUREL.

On peut réunir les expressions des deux pas en une seule :

$$\boxed{l = \frac{1}{2}[by \mp 1]}$$

dans laquelle b, qui est le *pas des régions neutres contenant des balais*, prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$

$(2d - \varepsilon)$ fois la valeur : $\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}$,

ε — — $\beta \mp 2$

ε est le *nombre entier inférieur à* $2d$, *qui donne pour* β *un nombre entier* IMPAIR.

Remarque 1. — Pour p MULTIPLE DE d (condition qui ainsi que nous le verrons [chap. VII, § 5, p. 75] doit toujours être remplie quand p est supérieur à d) et :

si $\frac{p}{d}$ *est impair*, on a : $\varepsilon = 0$ $b = \beta = \frac{p}{d}$

le pas est unique, il a pour expression :

$$\boxed{l = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{d} y \mp 1\right]} \quad \text{d'où} \quad \boxed{l = \frac{N}{2d}}$$

si $\frac{p}{d}$ *est pair*, on a : $\varepsilon = d$ et $\beta = \frac{p}{d} \pm 1$, ce qui donne :

$$d \text{ fois le pas } l_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{d} \pm 1\right) y \mp 1\right]$$

$$d \text{ fois le pas } l_t = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{d} \mp 1\right) y \mp 1\right]$$

L'ordre étant $\left[\frac{d}{2d}\right] = \frac{1}{2}$ les deux pas alternent.

Remarque 2. — Nous avons admis que α_i variait toujours dans le même sens que γ_i et par suite β_j dans le même sens que j.

Cette règle souffre une exception.

Lorsque p *est inférieur à* d

on a : $\beta = \pm 1$

le signe de 1 étant celui de ε dans $\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}$

d'où $l_1 = \frac{1}{2}[\pm y \mp 1]$

$l_t = \frac{1}{2}[\mp y \mp 1]$

Celui des deux pas qui contient y avec le signe $+$ produit une avance, l'autre produit un recul. [V. l'exemple $p = 6$ $d = 9$.]

D. — Applications. Exemples de tableaux généraux, y étant impair.

Nous donnerons, ci-après, les TABLEAUX GÉNÉRAUX des classes d'enroulement que nous avons rencontrées jusqu'ici et nous en ferons l'application particulière à ceux des enroulements précédemment donnés en exemple, dont le pas était IMPAIR. [Ex. 1,2, 5.6, 9.10.]

Classe : $p = 6 \quad d = 3$ y impair.

$\frac{p}{d} = 2$, p étant un multiple pair de d on a : $\varepsilon = \pm d = \pm 3$

BAV. $\varepsilon = 3$

$$l_1 = \frac{1}{2}[3y \mp 1]$$

$$l_\varepsilon = \frac{1}{2}[y \mp 1]$$

$$\text{Ordre } \left[\frac{3}{6}\right] = 1\varepsilon 1\varepsilon 1\varepsilon$$

BAR. $\varepsilon = -3$

$$l_1 = \frac{1}{2}[y \mp 1]$$

$$l_\varepsilon = \frac{1}{2}[3y \mp 1]$$

$$\text{Ordre } \left[\frac{3}{6}\right] = 1\varepsilon 1\varepsilon 1\varepsilon$$

j	ORDRE	l	L_j	j	ORDRE	l	L_j
1	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	1	1	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$
2	ε	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[4y \mp 2]$	2	ε	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[4y \mp 2]$
3	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[7y \mp 3]$	3	1	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[5y \mp 3]$
4	ε	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[8y \mp 4]$	4	ε	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[8y \mp 4]$
5	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[11y \mp 5]$	5	1	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[9y \mp 5]$
6	ε	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[12y \mp 6]$	6	ε	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\frac{1}{2}[12y \mp 6]$

Les numéros des régions neutres sont les coefficients de y dans les expressions de L_j.

Exemple numérique.

$$N = 651 \qquad y = \frac{651 + 3}{6} = 109 \quad \text{(Exemples 1 et 2.)}$$

les formules ci-dessus donnent :

BAV. $l_1 = 163$ $l_\varepsilon = 54$

BAR. $l_1 = 54$ $l_\varepsilon = 163$

Ces pas sont les mêmes que ceux trouvés par la méthode du chapitre II, § 3, D. (Exemples 1 et 2, p. 26.) Il est donc inutile de répéter le tableau.

Remarquons que : $\frac{y-1}{2d} = \frac{108}{6} = 18$, étant un nombre entier, des balais devaient, en effet, être rencontrés dans l'ordre naturel par le mobile se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement.

Classe : $p = 6 \quad d = 9$ y impair.

BAV. $\beta = \dfrac{6 + \varepsilon}{9}$ $\varepsilon = 3$ $\beta = 1$

$$l_1 = \frac{1}{2}[y \mp 1]$$

$$l_\varepsilon = \frac{1}{2}[-y \mp 1]$$

Ordre $\left[\dfrac{3}{18}\right] = \left[\dfrac{1}{6}\right] = 11111\,\varepsilon$

BAR. $\beta = \dfrac{6 - 15}{9}$ $\varepsilon = -15$ $\beta = -1$.

$$l_1 = \frac{1}{2}[-y \mp 1]$$

$$l_\varepsilon = \frac{1}{2}[y \mp 1]$$

Ordre $\left[\dfrac{15}{18}\right] = \left[\dfrac{5}{6}\right] = 1\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon$.

j	ORDRE	L_j	j	ORDRE	L_j
1	1	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$	1	1	$\frac{1}{2}[-y \mp 1]$
2	1	$\frac{1}{2}[2y \mp 2]$	2	ε	$\frac{1}{2}[\quad \mp 2]$
3	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 3]$	3	ε	$\frac{1}{2}[y \mp 3]$
4	1	$\frac{1}{2}[4y \mp 4]$	4	ε	$\frac{1}{2}[2y \mp 4]$
5	1	$\frac{1}{2}[5y \mp 5]$	5	ε	$\frac{1}{2}[3y \mp 5]$
6	ε	$\frac{1}{2}[4y \mp 6]$	6	ε	$\frac{1}{2}[4y \mp 6]$
7	1	$\frac{1}{2}[5y \mp 7]$	7	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 7]$
8	1	$\frac{1}{2}[6y \mp 8]$	8	ε	$\frac{1}{2}[4y \mp 8]$
9	1	$\frac{1}{2}[7y \mp 9]$	9	ε	$\frac{1}{2}[5y \mp 9]$
10	1	$\frac{1}{2}[8y \mp 10]$	10	ε	$\frac{1}{2}[6y \mp 10]$
11	1	$\frac{1}{2}[9y \mp 11]$	11	ε	$\frac{1}{2}[7y \mp 11]$
12	ε	$\frac{1}{2}[8y \mp 12]$	12	ε	$\frac{1}{2}[8y \mp 12]$
13	1	$\frac{1}{2}[9y \mp 13]$	13	1	$\frac{1}{2}[7y \mp 13]$
14	1	$\frac{1}{2}[10y \mp 14]$	14	ε	$\frac{1}{2}[8y \mp 14]$
15	1	$\frac{1}{2}[11y \mp 15]$	15	ε	$\frac{1}{2}[9y \mp 15]$
16	1	$\frac{1}{2}[12y \mp 16]$	16	ε	$\frac{1}{2}[10y \mp 16]$
17	1	$\frac{1}{2}[13y \mp 17] = 1$	17	ε	$\frac{1}{2}[11y \mp 17]$
18	ε	$\frac{1}{2}[12y \mp 18] = 0$	18	ε	$\frac{1}{2}[12y \mp 18]$

Exemple numérique.

$N = 645$ $y = \dfrac{645 + 9}{6} = 109$ (Exemples 5 et 6.)

$\dfrac{y - 1}{2d} = \dfrac{108}{18} = 6.$ Les balais ont été trouvés dans l'ordre naturel par la méthode du chapitre II (p. 27).

Classe : | $p = 12$ $d = 5$ | y impair.

BAV. $\beta = \frac{12 + 2}{5}$ $\varepsilon = 3$ $\beta = 3$

$$l_1 = \frac{1}{2}[3y \mp 1]$$

$$l_\iota = \frac{1}{2}[y \mp 1]$$

Ordre $\left[\frac{3}{10}\right]$ 111ε11ε11ε

BAR. $\beta = \frac{12 + \varepsilon}{5}$ $\varepsilon = 7$ $\beta = 1$

$$l_1 = \frac{1}{2}[y \pm 1]$$

$$l_\iota = \frac{1}{2}[3y \mp 1]$$

Ordre $\left[\frac{7}{10}\right]$ 1εε 1εε 1εεε

j	ORDRE	L	j	ORDRE	L
1	1	$\frac{1}{2}[3y \mp 1]$	1	1	$\frac{1}{2}[y \mp 1]$
2	1	$\frac{1}{2}[6y \mp 2]$	2	ε	$\frac{1}{2}[4y \mp 2]$
3	1	$\frac{1}{2}[9y \mp 3]$	3	ε	$\frac{1}{2}[7y \mp 3]$
4	ε	$\frac{1}{2}[10y \mp 4]$	4	1	$\frac{1}{3}[8y \mp 4]$
5	1	$\frac{1}{2}[13y \mp 5]$	5	ε	$\frac{1}{2}[11y \mp 5]$
6	1	$\frac{1}{2}[16y \mp 6]$	6	ε	$\frac{1}{2}[14y \mp 6]$
7	ε	$\frac{1}{2}[17y \mp 7]$	7	1	$\frac{1}{2}[15y \mp 7]$
8	1	$\frac{1}{2}[20y \mp 8]$	8	ε	$\frac{1}{2}[18y \mp 8]$
9	1	$\frac{1}{2}[23y \mp 9]$	9	ε	$\frac{1}{2}[21y \mp 9]$
10	ε	$\frac{1}{2}[24y \mp 10]$	10	ε	$\frac{1}{2}[24y \mp 10]$

Exemple numérique.

N = 1 783 $y \pm \frac{1\,783 + 5}{12} = 149$ (Exemples 9 et 10.)

$\varepsilon = 3$ $l_1 = 223$ $l_\iota = 74$ ‖ $\varepsilon = -3$ $l_1 = 74$ $l_\iota = 223$

j	ORDRE	l	L_j	j	ORDRE	l	L_j
1	1	223	223	1	1	74	74
2	1	223	446	2	ε	223	297
3	1	223	669	3	ε	223	520
4	ε	74	743	4	1	74	594
5	1	223	966	5	ε	223	817
6	1	223	1 189	6	ε	223	1 040
7	ε	74	1 263	7	1	74	1 114
8	1	223	1 486	8	ε	223	1 337
9	1	223	1 709	9	ε	223	1 560
10	ε	74	1 783	10	ε	223	1 783

$\frac{y + 1}{2d} = \frac{150}{10} = 15.$

La méthode du chapitre II a donné les balais en sens inverse (p. 29).

3° ÉTUDE DU CAS OU y EST PAIR

A. — Formules et pas des balais.

y étant PAIR, γ_i ne peut prendre que les valeurs *paires* 2.4.6... $2d$.

Posons :

$$\gamma_i = 2j$$
$$\delta_i = \varepsilon_j$$
$$\alpha_i = \beta_j$$

nous aurons la double relation :

$$L_j = \frac{1}{2}[\beta_j y \mp 2j] = \left[\beta_j \frac{y}{2} \mp j\right]$$

$$\beta_j = \frac{2jp \pm \varepsilon_j}{d}$$

Pour avoir les balais, dans l'ordre naturel, nous devons donner à j, variable indépendante, les valeurs croissantes 1.2.3...d.

j sera, à la fois, le numéro d'ordre d'un balai positif par rapport aux autres balais positifs et celui d'un balai négatif par rapport aux autres balais négatifs, mais dans l'ensemble de tous les balais tant positifs que négatifs les deux balais considérés occupent les rangs : $(2j - 1)$ et $(2j)$.

Des deux valeurs de β_j qui correspondent à ces deux balais de signes contraires, l'une β'_j est impaire, l'autre β''_j est paire, et comme d, premier avec y, est impair les valeurs correspondantes ε'_j et ε''_j de ε_j ont, respectivement, même parité que β'_j et β''_j. Les valeurs paires ε''_j donneront donc les balais de même signe que le balai *zéro* (lesquels d'après nos conventions sont les balais positifs) et les valeurs impaires ε'_j donneront les balais de signe contraire (balais négatifs).

Les deux valeurs de ε_j inférieures à $2d$ se trouvant ainsi utilisées toutes deux, l'indétermination rencontrée, quand y était impair (p. 48), ne se présente pas ici.

Désignons, comme précédemment, par β et ε les valeurs de β_j et de ε_j pour $j = 1$, nous aurons :

$$\boxed{\beta = \frac{2p \pm \varepsilon}{d}}$$

ε est le *nombre entier inférieur à 2d qui donne pour β un nombre entier* IMPAIR.

On peut dire aussi que ε est le nombre impair inférieur à $2d$ donnant pour β un nombre entier.

Remarque 1. — Les valeurs de ε'_j et ε''_j servant à la détermination de β'_j et β''_j sont, respectivement, les numéros d'ordre des sommets impairs et pairs du polygone $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$.

En effet, traçons le polygone $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$. Dans ce polygone les termes :

$$\varepsilon_j \quad \text{et} \quad q_j = \frac{j\varepsilon + \varepsilon_j}{2d}$$

ont la même signification que précédemment (lorsque y était impair § 2 A, p. 49) mais ε étant ici impair par définition, les valeurs impaires de j donneront toujours dans ce polygone des valeurs impaires de ε_j et les valeurs paires de j donneront des valeurs paires de ε_j.

On a identiquement :

$$\beta_j = j\left(\frac{2p \pm \varepsilon}{d}\right) \mp 2\left(\frac{j\varepsilon - \varepsilon_j}{2d}\right).$$

Portons dans cette expression les valeurs de ε_j données par le tracé du polygone, nous aurons comme précédemment

$$\beta_j = j\beta \mp 2q_j$$

et β étant *impair*, les valeurs de β_j ainsi déterminées auront, à la fois, même parité que j et que ε_j.

Il en résulte que pour : $j = 1.2...d$ (seules valeurs qui interviennent dans l'enroulement), les numéros d'ordre des sommets impairs du polygone, soit : $\varepsilon_1\ \varepsilon_3 ... \varepsilon_d$, seront les valeurs : $\varepsilon'_1\ \varepsilon'_3 ... \varepsilon'_d$ de l'enroulement et les numéros des sommets pairs soit : $\varepsilon_2\ \varepsilon_4 ... \varepsilon_{d-1}$ seront les valeurs : $\varepsilon''_2\ \varepsilon''_4 ... \varepsilon''_{d-1}$ de l'enroulement.

Il nous reste à déterminer les valeurs :

$$\varepsilon'_2 \quad \varepsilon'_4 \dots \quad \varepsilon'_{d-1} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon''_1 \quad \varepsilon''_3 \dots \quad \varepsilon''_d$$

de l'enroulement.

Or, les valeurs de ε'_j et de ε''_j qui correspondent à une même valeur de j diffèrent entre elles, nous le savons, de d. On a donc :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon'_2 = \varepsilon''_2 + d & \varepsilon''_1 = \varepsilon'_1 + d \\ \varepsilon'_4 = \varepsilon''_4 + d & \varepsilon''_3 = \varepsilon'_3 + d \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon'_{d-1} = \varepsilon''_{d-1} + d & \varepsilon''_d = \varepsilon'_d + d \end{array}$$

Considérons ceux des sommets du polygone dont les numéros d'ordre sont :

$$(\varepsilon_1 + d) \quad (\varepsilon_2 + d) \dots\dots (\varepsilon_d + d)$$

d étant impair, ces numéros ont respectivement des parités opposées à celles des numéros d'ordre :

$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \dots\dots \varepsilon_d$$

de sorte que :

$(\varepsilon_1 + d)$ $(\varepsilon_3 + d)$ ... $(\varepsilon_d + d)$ sont des nombres *pairs*.
$(\varepsilon_2 + d)$ $(\varepsilon_4 + d)$ $(\varepsilon_{d-1} + d)$ — — *impairs*.

Les numéros d'ordre des sommets impairs :
$(\varepsilon_2 + d)$ $(\varepsilon_4 + d)$,... $(\varepsilon_{d-1} + d)$ sont donc les valeurs de

$$\varepsilon'_2 \; \varepsilon'_4 \dots \; \varepsilon'_{d-1}$$

et les numéros d'ordre des sommets pairs :
$(\varepsilon_1 + d)$ $(\varepsilon_3 + d)$ $(\varepsilon_d + d)$, les valeurs de

$$\varepsilon''_1 \; \varepsilon''_3 \dots, \; \varepsilon''_d$$

d'où il résulte que :

Les numéros d'ordre de tous les sommets impairs du polygone sont bien les valeurs de ε'_j et les numéros de tous les sommets pairs les valeurs de ε''_j.

Remarque 2. — Contrairement à ce qui se produit lorsque y est impair, (§ 2 A, Rem. 2, p. 50) *les balais de même signe, pris dans l'ordre naturel, n'ont pas nécessairement même parité et par conséquent les balais, dans l'ordre naturel, peuvent n'être pas alternativement positifs et négatifs.*

En effet, des deux balais correspondant à une même valeur de j, celui qui a même signe que le balai zéro (balai positif) et qui, par conséquent, occupe la région β''_j SUIT OU PRÉCÈDE celui de signe contraire (balai négatif), lequel occupe la région β'_j suivant que le numéro d'ordre de la région qu'il occupe est supérieur ou inférieur au numéro d'ordre de la région occupée par l'autre balai, c'est-à-dire suivant que :

$$\beta'_j \lesseqgtr \beta''_j .$$

Lorsque ε est positif (BAV) cette condition suppose :

$$\varepsilon'_j \lesseqgtr \varepsilon''_j$$

lorsque ε est négatif (BAR) elle correspond au contraire à :

$$\varepsilon'_j \gtreqless \varepsilon''_j$$

En se reportant à la remarque précédente on voit aisément, qu'en général, pour un même enroulement, ε'_j est tantôt supérieur tantôt inférieur à ε''_j, de sorte que les balais positifs et négatifs n'alternent pas régulièrement.

Exemple.

Prenons un exemple, soit : $\varepsilon = 3 \qquad 2d = 10$

Le polygône $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right] = \left[\frac{3}{10}\right]$ est celui de la figure 8 A (p. 24) dans lequel δ serait remplacé par ε ; les valeurs de ε'_j et de ε''_j sont les suivantes :

j	ε'_j	ε''_j
1	3	8
2	6	1
3	9	4
4	2	7
5	5	0

et, par conséquent, l'ordre dans lequel se succèdent les balais est l'ordre ci-après :

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10
− + + − + − + − + − .

Remarque 3. — *Lorsque le pas de l'enroulement est pair: le mobile, se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement, ne peut jamais rencontrer les balais, dans l'ordre naturel, ni dans l'ordre inverse.*

En effet, à une valeur donnée de j, correspondent deux valeurs de i, différant entre elles de d. Les deux balais j qui, par rapport à l'ensemble des balais, portent les numéros $(2j - 1)$ et $2j$ se suivent sur le collecteur. Ces mêmes balais, dans l'ordre où ils sont rencontrés par le mobile, portent les numéros i et $(i \pm d)$. Or d étant impair, sa valeur minimum est *trois* (les enroulements série qui n'ont que deux balais en tout ($d = 1$) n'entrant pas en ligne de compte) et par conséquent les balais considérés ne sont rencontrés par le mobile ni dans l'ordre naturel, ni dans l'ordre inverse.

Pas des balais. — Les balais positifs et négatifs se présentant séparément, lorsque y est pair, il n'est pas utile dans ce cas de rechercher les expressions des pas de l'ensemble des balais, pas qui sont relativement complexes, ainsi que le montrent les exemples donnés plus loin où l'on trouvera :

Classe :	$p = 6$	$d = 3$		nombre des pas :	2
—	$p = 6$	$d = 9$	$\varepsilon > 0$	—	4
—	—	—	$\varepsilon < 0$	—	3
—	$p = 12$	$d = 5$	$\varepsilon > 0$	—	3
—	—	—	$\varepsilon < 0$	—	4

Il est plus simple, pour établir les tableaux généraux lorsque y est pair, d'appliquer directement la formule :

$$\boxed{L_j = \left[\beta_j \frac{y}{2} \mp j\right]}$$

Les anomalies qui peuvent se présenter dans l'ordre naturel des balais de même signe, *lorsque p est inférieur à d*, seront examinées au chapitre suivant (§ 5, p. 75 et 76).

B. — **Applications. Exemples de tableaux généraux. *y* étant pair.**

Dressons les TABLEAUX GÉNÉRAUX, pour y PAIR, des classes d'enroulements déjà étudiées pour y *impair* et faisons-en l'application aux exemples donnés plus haut. [Exemples : 3, 4, 7, 8, 11, 12.]

Classe : $p = 6 \quad d = 3$ y pair.

BAV. $\beta_j = \dfrac{12j + \varepsilon_j}{3}$ ‖ BAR. $\beta_j = \dfrac{12j - \varepsilon_j}{3}$

j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	3	5	$\left(5\frac{y}{2} \mp 1\right)$	»	1	3	3	$\left(3\frac{y}{2} \mp 1\right)$	»
	0	4	»	$\left(4\frac{y}{2} \mp 1\right)$		0	4	»	$\left(4\frac{y}{2} \mp 1\right)$
2	3	9	$\left(9\frac{y}{2} \mp 2\right)$	»	2	3	7	$\left(7\frac{y}{2} \mp 2\right)$	»
	0	8	»	$\left(8\frac{y}{2} \mp 2\right)$		0	8	»	$\left(8\frac{y}{2} \mp 2\right)$
3	3	1	$\left(\frac{y}{2}\right)$	»	3	3	11	$\left(11\frac{y}{2} \mp 3\right)$	»
	0	0	»	0		0	12	»	0

Les numéros d'ordre des régions neutres sont les chiffres de la colonne (β_j).

Exemple numérique.

$N = 639 \qquad y = \dfrac{639 - 3}{6} = 106$ (Exemples 3 et 4, p. 26.)

BAV. ‖ BAR.

j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	3	5	266	»	1	3	3	160	»
	0	4	»	213		0	4	»	213
2	3	9	479	»	2	3	7	373	»
	0	8	»	426		0	8	»	426
3	3	1	53	»	3	3	11	586	»
	0	0	»	0		0	12	»	0

Classe : $p = 6 \quad d = 9$ y pair.

BAV. $\beta_j = \frac{12j + \varepsilon_j}{9}$ ‖ BAR. $\beta_j = \frac{12j - \varepsilon_j}{9}$

j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	15	3	$3\frac{y}{2} \mp 1$	»	1	3	1	$\frac{y}{2} \mp 1$	»
	6	2	»	$2\frac{y}{2} \mp 1$		12	0	»	∓ 1
2	3	3	$3\frac{y}{2} \mp 2$	»	2	15	1	$\frac{y}{2} \mp 2$	»
	12	4	»	$4\frac{y}{2} \mp 2$		6	2	»	$2\frac{y}{2} \mp 2$
3	9	5	$5\frac{y}{2} \mp 3$	»	3	9	3	$3\frac{y}{2} \mp 3$	»
	0	4	»	$4\frac{y}{2} \mp 3$		0	4	»	$4\frac{y}{2} \mp 3$
4	15	7	$7\frac{y}{2} \mp 4$	»	4	3	5	$5\frac{y}{2} \mp 4$	»
	6	6	»	$6\frac{y}{2} \mp 4$		12	4	»	$4\frac{y}{2} \mp 4$
5	3	7	$7\frac{y}{2} \mp 5$	»	5	15	5	$5\frac{y}{2} \mp 5$	»
	12	8	»	$8\frac{y}{2} \mp 5$		6	6	»	$6\frac{y}{2} \mp 5$
6	9	9	$9\frac{y}{2} \mp 6$	»	6	9	7	$7\frac{y}{2} \mp 6$	»
	0	8	»	$8\frac{y}{2} \mp 6$		0	8	»	$8\frac{y}{2} \mp 6$
7	15	11	$11\frac{y}{2} \mp 7$	»	7	3	9	$9\frac{y}{2} \mp 7$	»
	6	10	»	$10\frac{y}{2} \mp 7$		12	8	»	$8\frac{y}{2} \mp 7$
8	3	11	$11\frac{y}{2} \mp 8$	»	8	15	9	$9\frac{y}{2} \mp 8$	»
	12	12	»	$12\frac{y}{2} \mp 8$		6	10	»	$10\frac{y}{2} \mp 8$
9	9	1	$\frac{y}{2}$	»	9	9	11	$11\frac{y}{2} \mp 9$	»
	0	0	»	0		0	0	»	0

Classe : | $p = 6 \quad d = 9$ | y pair. (*suite*).

Exemple numérique.

$N = 645 \qquad y = \frac{645 - 9}{6}$ (Exemples 7 et 8, p. 28.)

BAV.					BAR.				
j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	15	3	160	»	1	3	1	54	»
	6	2	»	107		12	0	»	1
2	3	3	161	»	2	15	1	55	»
	12	4	»	214		6	2	»	108
3	9	5	268	»	3	9	3	162	»
	0	4	»	215		0	4	»	215
4	15	7	375	»	4	3	5	269	»
	6	6	»	322		12	4	»	216
5	3	7	376	»	5	15	5	270	»
	12	8	»	429		6	6	»	323
6	9	9	483	»	6	9	7	377	»
	0	8	»	430		0	8	»	430
7	15	11	590	»	7	3	9	484	»
	6	10	»	537		12	8	»	431
8	3	11	591	»	8	15	9	485	»
	12	12	»	644		6	10	»	538
9	9	1	53	»	9	9	11	592	»
	0	0	»	0		0	0	»	0

Classe : $p = 12 \quad d = 5$ y pair.

BAV. $\beta_j = \frac{24j + \varepsilon_j}{5}$ ‖ BAR. $\beta_j = \frac{24j - \varepsilon_j}{5}$

j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	1	5	$5\frac{y}{2} \mp 1$	»	1	9	3	$3\frac{y}{2} \mp 1$	»
	6	6	»	$6\frac{y}{2} \mp 1$		4	4	»	$4\frac{y}{2} \mp 1$
2	7	11	$11\frac{y}{2} \mp 2$	»	2	3	9	$9\frac{y}{2} \mp 2$	»
	2	10	»	$10\frac{y}{2} \mp 2$		8	8	»	$8\frac{y}{2} \mp 2$
3	3	15	$15\frac{y}{2} \mp 3$	»	3	7	13	$13\frac{y}{2} \mp 3$	»
	8	16	»	$16\frac{y}{2} \mp 3$		2	14	»	$14\frac{y}{2} \mp 3$
4	9	21	$21\frac{y}{2} \mp 4$	»	4	1	19	$19\frac{y}{2} \mp 4$	»
	4	20	»	$20\frac{y}{2} \mp 4$		6	18	»	$18\frac{y}{2} \mp 4$
5	5	1	$\frac{y}{2}$	»	5	5	23	$23\frac{y}{2} \mp 5$	»
	0	0	»	0		0	0	»	0

Exemple numérique.

$N = 1\,771 \qquad y = \frac{1\,771 + 5}{12} = 148$ (Exemples 11 et 12, p. 29.)

BAV. ‖ BAR.

j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j	j	ε_j	β_j	L'_j	L''_j
1	1	5	369	»	1	9	3	221	»
	6	6	»	443		4	4	»	295
2	7	11	812	»	2	3	9	664	»
	2	10	»	738		8	8	»	590
3	3	15	1 107	»	3	7	13	959	»
	8	16	»	1 181		2	14	»	1 033
4	9	21	1 550	»	4	1	19	1 402	»
	4	20	»	1 476		6	18	»	1 328
5	5	1	74	»	5	5	23	1 697	»
	0	0	»	0		0	0	»	0

CHAPITRE VII

DIAGRAMMES GÉNÉRAUX DES SECTIONS EN COURT-CIRCUIT

1° Formule des balais de même signe dans l'ordre naturel.
2° Pas des balais de même signe dans l'ordre naturel.
3° Tableaux généraux des balais de même signe.
4° Nombre et groupement des sections en court-circuit.
5° Commutation symétrique. Commutation individuelle.
6° Diagrammes généraux des sections en court-circuit.
   A. Commutation normale.
   B. Commutations anormales.
7° Formule de passage des balais d'un signe donné aux balais de signe contraire.
   A. Formule de passage dans le cas où *y* est impair.
   B. Formule de passage dans le cas où *y* est pair.
   C. Formule générale.
   D. Diagrammes des sections commutées par les balais négatifs.
   E. Applications.

En appliquant, aux *tableaux généraux* du chapitre précédent, le procédé par lequel nous avons établi au chapitre III les diagrammes des enroulements particuliers représentés par les tableaux du chapitre II, on obtiendrait, évidemment, des *diagrammes généraux des sections commutées*, se rapportant, comme les tableaux généraux dont ils dérivent, à toutes les machines d'une même classe.

On arrive, plus rapidement et plus simplement, au but de la façon suivante.

Au lieu de déterminer, à la fois, comme nous l'avons fait jusqu'ici, l'ensemble de tous les balais, tant positifs que négatifs, *déterminons, directement et dans l'ordre naturel, les seuls balais de même signe que le balai zéro*. Les sections commutées par

ces balais qui, d'après nos conventions, sont les *balais positifs*, apparaîtront tout naturellement.

Nous verrons ensuite (§ 7 du présent chapitre, p. 82) que les emplacements des balais, de signe contraire aux précédents, ou *balais négatifs*, peuvent être obtenus par une simple rotation des balais positifs, d'où il résulte que *le diagramme des sections commutées par les balais négatifs est géométriquement identique à celui des sections commutées par les balais positifs*, et qu'il suffit, pour l'en déduire, d'ajouter à tous les numéros d'ordre figurant sur ce dernier diagramme, le nombre qui mesure l'angle, évalué en nombre de lames du collecteur, dont il faut faire tourner les balais positifs pour les faire coïncider avec les balais négatifs.

1° Formule des balais de même signe dans l'ordre naturel

Cherchons donc les EMPLACEMENTS DES BALAIS POSITIFS.

Ces balais étant d'ordre pair, par rapport au mobile qui se déplace à l'intérieur de l'enroulement, le i^{me} balai positif, rencontré par le mobile, occupe parmi tous les balais le rang $2i$, de sorte que son emplacement L''_i est donné par la double relation :

$$L''_i = L_{2i} = \frac{1}{2}\left[\alpha_{2i}y \mp \gamma_{2i}\right]$$

$$\alpha_{2i} = \frac{\gamma_{2i}p \pm \delta_{2i}}{d}$$

α_{2i} étant le rang, parmi toutes les régions neutres, de la région qui contient le balai considéré.

Rappelons que δ_{2i} et γ_{2i} sont des *nombres entiers inférieurs à* $2d$, choisis de façon à donner des nombres entiers pour :

$$N_{2i} = \frac{2iN \pm \delta_{2i}}{2d} \qquad \text{et pour :} \qquad m_{2i} = \frac{2iy - \gamma_{2i}}{2d}$$

α_{2i}, δ_{2i}, γ_{2i} étant évidemment pairs, nous pouvons poser :

$$\alpha_{2i} = 2\alpha''_i \qquad \delta_{2i} = 2\delta''_i \qquad \gamma_{2i} = 2\gamma''_{2i}.$$

Posons également :

$$N_{2i} = N''_i \qquad m_{2i} = m''_i$$

nous aurons :

$$L''_i = \alpha''_i y \mp \gamma''_i$$

$$\alpha''_i = \frac{\gamma''_i p \pm \delta''_i}{d}$$

$$N''_i = \frac{iN \pm \delta''_i}{d}$$

$$m''_i = \frac{iy - \gamma''_i}{d}.$$

δ''_i et γ''_i sont les *nombres entiers inférieurs à d* qui donnent pour N''_i et m''_i des nombres entiers.

α''_i rang qu'occupe, *parmi les régions neutres paires*, celle qui contient le i_m balai *pair*, peut naturellement être pair ou impair.

Posons :

$$\gamma''_i = j$$
$$\delta''_i = \varepsilon''_j$$
$$\alpha''_i = \beta''_j$$

il vient :

$$\boxed{L''_j = \beta''_j y \mp j}$$

et

$$\boxed{\beta''_j = \frac{jp \pm \varepsilon''_j}{d}}$$

On obtiendra les balais positifs, dans l'ordre naturel, en donnant à j, dans les deux relations ci-dessus, les valeurs $j = 1, 2, 3... d$, prenant chaque fois pour ε''_j *le nombre entier inférieur à d qui donne pour* β''_j *un nombre entier* (lequel peut être pair ou impair).

Désignant, comme toujours, par β'' et ε'' les valeurs de β''_j et ε''_j pour $j = 1$ on a :

$$\boxed{\beta'' = \frac{p \pm \varepsilon''}{d}}$$

ε'' est le *nombre entier inférieur à d* qui donne pour β'' un nombre entier dont la parité peut être quelconque.

Remarque 1. — Les valeurs de ε''_j correspondant aux différentes valeurs de j, sont évidemment déterminées par le polygone $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$

Remarque 2. — En appliquant le raisonnement fait au cha-

pitre VI (§ 2. A. Rem. 3, p. 50) on voit que le mobile, se déplaçant à l'intérieur de l'enroulement, rencontre les balais positifs :

dans l'*ordre naturel* lorsque : $\left(\frac{y-1}{d}\right)$ est entier.

— l'*ordre inverse* — $\left(\frac{y+1}{d}\right)$ —

2° Pas des balais de même signe dans l'ordre naturel

Le nombre des lames du collecteur comprises entre deux balais positifs consécutifs : $(j-1)$ et j est :

$$l''_j = L''_j - L''_{j-1} = (\beta''_j - \beta''_{j-1})\, y \mp 1$$

Posons : $b''_j = \beta''_j - \beta''_{j-1}$

il vient : $l''_j = b''_j y \mp 1.$

Un raisonnement identique à celui fait plus haut (chap. VI, § 2, C, p. 52) montrerait que lorsque j varie de 1 à d :

b''_j prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$

$(d-\varepsilon'')$ fois la valeur β''

ε'' — — $(\beta'' \mp 1)$.

l''_j prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$:

$(d-\varepsilon'')$ fois la valeur : $l''_1 = \beta'' y \mp 1$

ε'' — — $l''_8 = (\beta'' \mp 1)\, y \mp 1$

l''_1 et l''_8 sont les PAS DES BALAIS POSITIFS DANS L'ORDRE NATUREL. On peut réunir leurs expressions en une seule :

$$\boxed{l'' = b'' y \mp 1}$$

étant entendu que b'' (pas des régions *paires* contenant des balais positifs) prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$

$(d-\varepsilon'')$ fois la valeur : $\beta'' = \frac{p \pm \varepsilon''}{d}$

ε'' — — $(\beta'' \mp 1)$

ε'' est le nombre entier inférieur à d qui donne pour β'' un nombre entier dont la parité peut être quelconque.

Remarque 1. — LORSQUE p EST UN MULTIPLE DE d on a :

$$\varepsilon'' = 0 \qquad b'' = \beta'' = \frac{p}{d}$$

le pas des balais est unique et a pour expression :

$$\boxed{l'' = \frac{p}{d}\, y \mp 1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{l'' = \frac{N}{d}}$$

Ce pas est aussi celui des *connexions équipotentielles*.

Remarque 2. — LORSQUE p EST INFÉRIEUR A d, un des deux pas b des régions neutres est nul et le pas correspondant l'' des balais prend la valeur $\pm$ 1.

Toutes les fois que le pas l'' passe par cette valeur particulière, le balai correspondant reste dans la même région neutre que le précédent, et se pose sur l'une des deux lames contiguës à celle qui porte le balai précédent.

Lorsque : $l'' = +1$ l'*ordre naturel est maintenu* mais lorsque : $l'' = -1$ le *balai recule d'une lame* et l'ordre naturel se trouve interrompu.

[Voir ci-après l'exemple $p = 6 \quad d = 9$.]

3° APPLICATIONS

(EXEMPLES DE TABLEAUX GÉNÉRAUX DES BALAIS DE MÊME SIGNE)

Dressons les TABLEAUX GÉNÉRAUX DES BALAIS POSITIFS, des classes d'enroulement précédemment prises comme exemples.

Classe : $\boxed{p = 6 \quad d = 3}$ (Balais positifs.)

Tableau général.	*Exemples numériques.* PRO (Ex. 1, 2, p. 54).	RÉTRO (Ex. 3, 4, p. 62).
$\frac{p}{d} = 2$ est entier.	$N = 651$	$N = 639$
$l'' = \frac{p}{d}\, y \mp 1$	$y = \frac{651 + 3}{6} = 109$	$y = \frac{639 - 3}{6} = 106$
$l'' = 2y \mp 1$.	$l'' = 2 \times 109 - 1 = 217$	$l'' = 2 \times 106 + 1 = 213$

j	l''	L_j''	j	l''	L_j''	j	l''	L_j''
1	$2y \mp 1$	$2y \mp 1$	1	217	217	1	213	213
2	$2y \mp 1$	$4y \mp 2$	2	217	434	2	213	426
3	$2y \mp 1$	0	3	217	651	3	213	639

Les numéros d'ordre des régions neutres, par rapport à toutes les régions, sont les doubles des coefficients de y dans l'expression de L_j''.

Classe : $p = 6 \quad d = 9$ Balais positifs.

BAV. $\varepsilon = 3 \quad \beta = 1$	BAR. $\varepsilon = -6 \quad \beta = 0$
$l_1'' = y \mp 1$	$l_1'' = \mp 1$
$l_i'' = \mp 1$	$l_i'' = y \mp 1$
Ordre $\left[\frac{3}{9}\right] = 11\varepsilon\ 11\varepsilon\ 11\varepsilon$	Ordre $\left[\frac{6}{9}\right] = 1\varepsilon\varepsilon\ 1\varepsilon\varepsilon\ 1\varepsilon\varepsilon$

j	ORDRE	l''	L_j''	j	ORDRE	l''	L_j''
1	1	$y \mp 1$	$y \mp 1$	1	1	∓ 1	∓ 1
2	1	$y \mp 1$	$2y \mp 2$	2	ε	$y \mp 1$	$y \mp 2$
3	ε	∓ 1	$2y \mp 3$	3	ε	$y \mp 1$	$2y \mp 3$
4	1	$y \mp 1$	$3y \mp 4$	4	1	∓ 1	$2y \mp 4$
5	1	$y \mp 1$	$4y \mp 5$	5	ε	$y \mp 1$	$3y \mp 5$
6	ε	∓ 1	$4y \mp 6$	6	ε	$y \mp 1$	$4y \mp 6$
7	1	$y \mp 1$	$5y \mp 7$	7	1	∓ 1	$4y \mp 7$
8	1	$y \mp 1$	$6y \mp 8$	8	ε	$y \mp 1$	$5y \mp 8$
9	ε	∓ 1	0	9	ε	$y \mp 1$	0

Exemples numériques.

PRO (Ex. 5 et 6, p. 55.)	RÉTRO (Ex. 7 et 8, p. 64.)
$N = 645 \quad y = \frac{645 + 9}{6} = 109$	$N = 645 \quad y = \frac{645 - 9}{6} = 106$

BAV. $\varepsilon = +3$	BAR. $\varepsilon = -6$	BAV. $\varepsilon = 3$	BAR. $\varepsilon = -6$
$l_1'' = 108$	$l_1'' = -1$	$l_1'' = 107$	$l_1'' = 1$
$l_i'' = -1$	$l_i'' = 108$	$l_i'' = 1$	$l_i'' = 107$

j	l''	L_i''	j	l''	L_j''	j	l''	L_j''	j	l''	L_j''
1	108	108	1	—1	644	1	107	107	1	1	1
2	108	216	2	108	107	2	107	214	2	107	108
3	—1	215	3	108	215	3	1	215	3	107	215
4	108	323	4	—1	214	4	107	322	4	1	216
5	108	431	5	108	322	5	107	429	5	107	323
6	—1	430	6	108	430	6	1	430	6	107	430
7	108	538	7	—1	429	7	107	537	7	1	431
8	108	1	8	108	537	8	107	644	8	107	538
9	—1	0	9	108	645	9	1	645	9	107	645

Classe : $p = 12 \quad d = 5$ (*Balais positifs.*)

BAV. $\varepsilon = 3 \quad \beta = 3$	BAR. $\varepsilon = -2 \quad \beta = 2$
$l_1'' = 3y \mp 1$	$l_1'' = 2y \mp 1$
$l_t'' = 2y \mp 1$	$l_t'' = 3y \mp 1$
Ordre $\left[\frac{3}{5}\right] = 1\varepsilon\ 1\varepsilon\varepsilon$	Ordre $\left[\frac{2}{5}\right] = 11\varepsilon\ 1\varepsilon$

j	ORDRE	l''	L_j''	j	ORDRE	l''	L_j
1	1	$3y \mp 1$	$3y \mp 1$	1	1	$2y \mp 1$	$2y \mp 1$
2	ε	$2y \mp 1$	$5y \mp 2$	2	1	$2y \mp 1$	$4y \mp 2$
3	1	$3y \mp 1$	$8y \mp 3$	3	ε	$3y \mp 1$	$7y \mp 3$
4	ε	$2y \mp 1$	$10y \mp 4$	4	1	$2y \mp 1$	$9y \mp 4$
5	ε	$2y \mp 1$	0	5	ε	$3y \mp 1$	0

Exemples numériques.

PRO (Ex. 9 et 10, p. 56.)	PRO (Ex. 11 et 12, p. 65.)
$N = 1\,783 \quad y = \frac{1\,783 + 5}{12} = 149$	$N = 1\,771 \quad y = \frac{1\,771 + 5}{12} = 148$

BAV. $\varepsilon = +3$	BAR. $\varepsilon = -2$	BAV. $\varepsilon = +3$	BAR. $\varepsilon = -2$
$l''_1 = 446$	$l_1'' = 297$	$l_1'' = 443$	$l_1'' = 295$
$l_t'' = 297$	$l_t'' = 446$	$l_t'' = 295$	$l_t'' = 443$

j	l''	L''	j	l''	L''	j	l''	L''	j	l''	L''
1	446	446	1	297	297	1	443	443	1	295	295
2	297	743	2	297	594	2	295	738	2	295	590
3	446	1 189	3	446	1 040	3	443	1 181	3	443	1 033
4	297	1 486	4	297	1 337	4	295	1 476	4	295	1 328
5	297	1 783	5	446	1 783	5	295	1 771	5	443	1 771

4° Nombre et groupement des sections en court-circuit

Le nombre total des sections, mises en court-circuit simultanément, par l'ensemble des balais de même signe, est égal au demi-nombre p des pôles, quel que soit le nombre $2d$ des circuits.

Les p sections en court-circuit sont réparties en d groupes, quel que soit le nombre des pôles.

De ces d groupes :

$(d - \varepsilon'')$ *groupes comprennent* $\beta'' = \dfrac{p \pm \varepsilon''}{d}$ *sections en série.*

ε'' — — $\beta'' \mp 1$ — —

ε'' *étant le nombre, inférieur à d, qui donne pour β'' un nombre entier.*

L'ordre dans lequel se succèdent les groupes de β'' et de $(\beta'' \mp 1)$ sections est déterminé par le polygone $\left[\dfrac{\varepsilon''}{d}\right]$.

Nous démontrerons cette proposition pour les balais dont le signe est le même que celui du balai zéro (balais positifs). Nous verrons par la suite (§ 7 D, p. 89) que la disposition des sections mises en court-circuit, par les balais négatifs, est la même que celle des sections mises en court-circuit par les balais positifs.

Considérons deux balais positifs consécutifs quelconques et désignons par L_1 L_2 les emplacements de ces deux balais, en supposant pour fixer les idées L_1 inférieur à L_2. On a dans tous les cas :

$$L_2 = L_1 + l''.$$

Pendant la commutation :
lorsque le premier balai est à cheval, sur les lames :

$$L_1 \qquad \text{et} \qquad (L_1 + 1).$$

le second balai est à cheval, sur les lames

$$L_2 \qquad \text{et} \qquad (L_2 + 1).$$

On a identiquement :

$$(L_2 + 1) - L_1 = (l'' + 1)$$
$$L_2 - (L_1 + 1) = (l'' - 1).$$

Or, dans un *enroulement progressif* (V. p. 69).

$$(l'' + 1) = b''y$$

et dans un *enroulement rétrograde*.

$$(l'' - 1) = b''y$$

d'où il résulte que les deux balais envisagés, s'ils sont réunis entre eux, par une *connexion extérieure* mettent en court-cir-

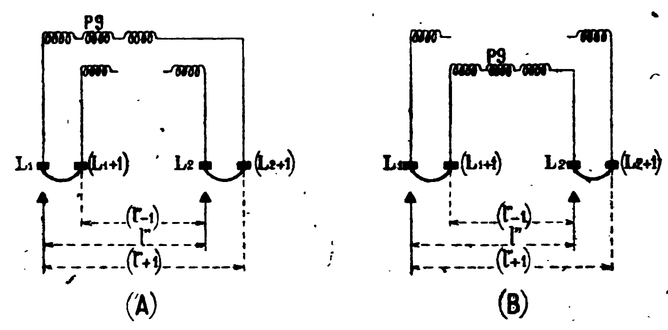


Fig. 18. — *Sections mises en court-circuit par deux balais de même signe consécutifs.*
(A) Enroulement progressif. — (B) Enroulement rétrograde.

cuit (grâce à cette connexion) b'' sections groupées en série, lesquelles vont :

dans un *enroulement progressif* (fig. 18 A) :
de la lame : L_1 à la lame : $(L_2 + 1)$
dans un *enroulement rétrograde* (fig. 18 B) :
de la lame : $(L_1 + 1)$ à la lame : L_2

Nous savons que pour l'ensemble des balais de même signe b'' prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$.

$(d - \varepsilon'')$ fois la valeur β'' englobant ainsi : $(d - \varepsilon'')$ β'' sections.
ε'' — $(\beta'' \mp 1)$ — ε'' $(\beta'' \mp 1)$ sect.

Le *nombre total des groupes est* donc :

$$(d - \varepsilon'') + \varepsilon'' = d$$

et le *nombre total des sections* mises en court-circuit :

$$d\beta'' \mp \varepsilon'' = p.$$

La proposition se trouve ainsi entièrement démontrée.

5° COMMUTATION SYMÉTRIQUE. COMMUTATION INDIVIDUELLE

L'inégalité des groupes de sections mises en court-circuit, quand elle existe, rend la commutation *dissymétrique*. Elle doit être évitée, parce que la commutation supposée parfaitement réglée pour les groupes d'une espèce pourrait ne pas l'être pour les autres, et l'on se trouverait alors conduit à donner aux balais, par tâtonnements, une position moyenne qui ne conviendrait, exactement, à aucun des groupes.

Pour p SUPÉRIEUR A d il est nécessaire, afin que la commutation soit *symétrique*, c'est-à-dire afin que tous les groupes de sections mises en court-circuit soient identiques, que ε'' soit nul, et par conséquent que p SOIT UN MULTIPLE DE d.

Dans ce cas, chacun des d groupes se compose de :

$$b'' = \beta'' = \frac{p}{d}$$

sections en série, dans ce cas aussi (nous l'avons déjà remarqué, chapitre VII, § 2. Rem. 1, p. 69), *tous les pas sont égaux*. Leur expression commune est :

$$l'' = \frac{p}{d} y \mp 1 = \frac{N}{d}.$$

Pour p ÉGAL A d, cas des *enroulements parallèles étoilés* on a :

$$b'' = \beta'' = 1.$$

Chaque section est commutée individuellement, comme dans les enroulements ordinaires, mais ainsi que cela se produit toujours dans les enroulements étoilés, cette section est mise en court-circuit par deux balais à travers une connexion extérieure, au lieu d'être mise, directement, en court-circuit par un seul balai.

Pour p INFÉRIEUR A d, une des valeurs de b est égale à *un*,

l'autre est *nulle*, de sorte que toutes les sections sont encore mises en court-circuit individuellement.

Dans le cas des balais avant (BAV) on a :

$$\beta'' = \frac{p + \varepsilon''}{d} = 1 \qquad (\beta'' - 1) = 0 \qquad \varepsilon'' = (d - p)$$

il y a donc :

$(d - \varepsilon'') = p$ groupes de *une* section.
$\varepsilon'' = (d - p)$ — *zéro* —

Dans le cas des balais arrière (BAR) on a :

$$\beta'' = \frac{p - \varepsilon''}{d} = 0 \qquad (\beta'' + 1) = 1 \qquad \varepsilon'' = p$$

d'où :

$(d - \varepsilon'') = (d - p)$ groupes de *zéro* section.
$\varepsilon'' = p$ — *une* —

En résumé, POUR QUE LA COMMUTATION SOIT SYMÉTRIQUE, LORSQUE p EST SUPÉRIEUR A d, IL EST NÉCESSAIRE QUE p SOIT UN MULTIPLE DE d.

6° DIAGRAMMES GÉNÉRAUX DES SECTIONS EN COURT-CIRCUIT

A. — Commutation normale.

On établit, aisément, le DIAGRAMME GÉNÉRAL DES SECTIONS EN COURT-CIRCUIT D'UNE CLASSE D'ENROULEMENTS donnée, soit en relevant les emplacements des balais dans le *tableau général des balais positifs* dressé de la façon indiquée plus haut (au paragraphe 3, p. 70), soit en portant, bout à bout, dans l'ordre voulu *les pas de ces mêmes balais*.

Nous donnerons comme exemple les DIAGRAMMES GÉNÉRAUX suivants :

Classe : $p = 6 \quad d = 3$

La figure 19 A est le diagramme circulaire et la figure 19 *C* le diagramme rectiligne des *enroulements progressifs* de cette classe établis en supposant la *rotation directe*.

Les sections commutées par les balais 0 et 1 sont les sections 0 et y. L'ensemble des sections commutées est :

Balais	0	1	2
Sections en court-circuit.	0 y	$2y - 1$ $3y - 1$	$4y - 2$ $5y - 2$
Balais	1	2	0

La figure 19 B est le diagramme circulaire et la figure 19 *D*

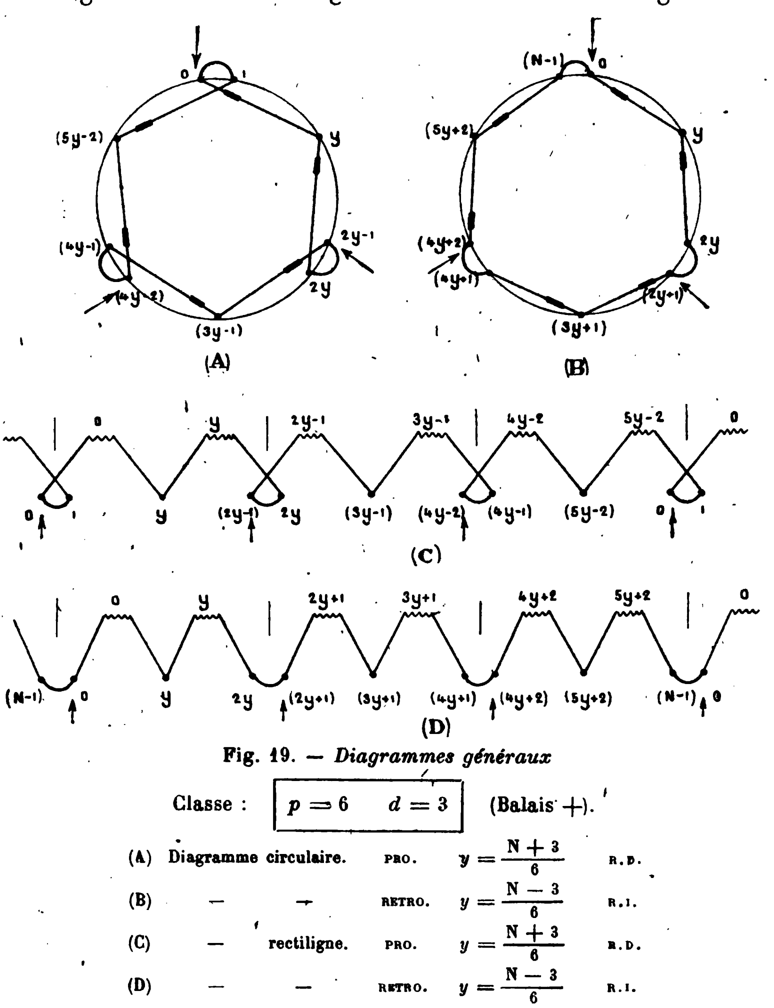


Fig. 19. — *Diagrammes généraux*

Classe : $p = 6 \quad d = 3$ (Balais +).

(A)	Diagramme circulaire.	PRO.	$y = \frac{N+3}{6}$	R.D.
(B)	—	—	RETRO.	$y = \frac{N-3}{6}$	R.I.
(C)	—	rectiligne.	PRO.	$y = \frac{N+3}{6}$	R.D.
(D)	—	—	RETRO.	$y = \frac{N-3}{6}$	R.I.

le diagramme rectiligne des *enroulements rétrogrades* établis en supposant la *rotation inverse*.

Les sections commutées sont :

Lames	0	1	2
Sections en court-circuit	0 y	$2y+1$ $3y+1$	$4y+2$ $5y+2$
Lames	1	2	0

La commutation est **SYMÉTRIQUE**, ainsi qu'il était à prévoir, p étant un multiple de d.

Classe : $p = 6 \quad d = 9$

La figure 20 est le diagramme rectiligne des enroulements progressifs de cette classe, des *balais avant* (BAV).

Les sections commutées sont :

Lames	0.1	2	3.4	5	6.7	8
Sections en court-circuit	0	$y-1$	$2y-3$	$3y-4$	$4y-6$	$5y-7$
Lames	2	3.4	3	6.7	8	0 — 1

La commutation est **INDIVIDUELLE** ($p < d$) et **DISSYMÉTRIQUE** (d n'étant pas un multiple de p).

Classe : $p = 12 \quad d = 5$

La figure 21 est le diagramme rectiligne des enroulements progressifs de cette classe dans le cas des *balais arrière* (BAR).

Les sections commutées sont :

Lames	0	1	2	3	4
Sections en court-circuit	0 y	$2y-1$ $3y-1$	$4y-2$ $5y-2$ $6y-2$	$7y-3$ $8y-3$	$9y-4$ $10y-4$ $11y-4$
Lames	1	2	3	4	0

La commutation est **DISSYMÉTRIQUE** (p n'étant pas un multiple

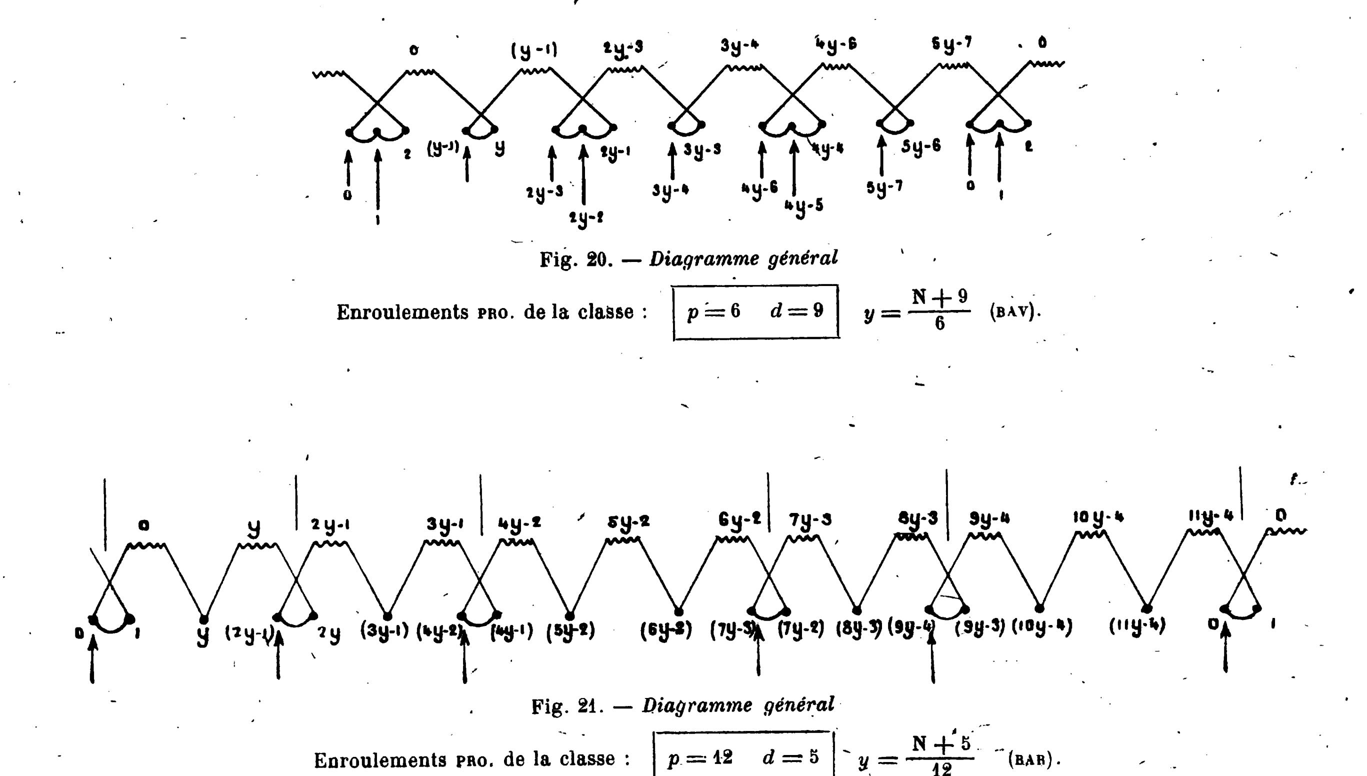


Fig. 20. — *Diagramme général*

Enroulements PRO. de la classe : $p = 6 \quad d = 9$ $y = \frac{N+9}{6}$ (BAV).

Fig. 21. — *Diagramme général*

Enroulements PRO. de la classe : $p = 12 \quad d = 5$ $y = \frac{N+5}{12}$ (BAR).

Les sections commutées sont :

Balais	0	1	2
Sections en court-circuit	0 y	$2y+1$ $3y+1$	$4y+2$ $5y+2$
Balais	1	2	0

La commutation est SYMÉTRIQUE, ainsi qu'il était à prévoir, puisque p est un multiple de d.

Classe : $p = 6 \quad d = 9$

La figure 20 est le diagramme rectiligne des enroulements *progressifs* de cette classe, des *balais avant* (BAV).

Les sections commutées sont :

Balais	0.1	2	3.4	5	6.7	8
Sections en court-circuit	0	$y-1$	$2y-3$	$3y-4$	$4y-6$	$5y-7$
Balais	2	3.4	3	6.7	8	0—1

La commutation est INDIVIDUELLE ($p < d$) et DISSYMÉTRIQUE (d n'étant pas un multiple de p).

Classe : $p = 12 \quad d = 5$

La figure 21 est le diagramme rectiligne des enroulements *progressifs* de cette classe dans le cas des *balais arrière* (BAR).

Les sections commutées sont :

Balais	0	1	2	3	4
Sections en court-circuit	0 y	$2y-1$ $3y-1$	$4y-2$ $5y-2$ $6y-2$	$7y-3$ $8y-3$	$9y-4$ $10y-4$ $11y-4$
Balais	1	2	3	4	0

La commutation est DISSYMÉTRIQUE (p n'étant pas un multiple de d).

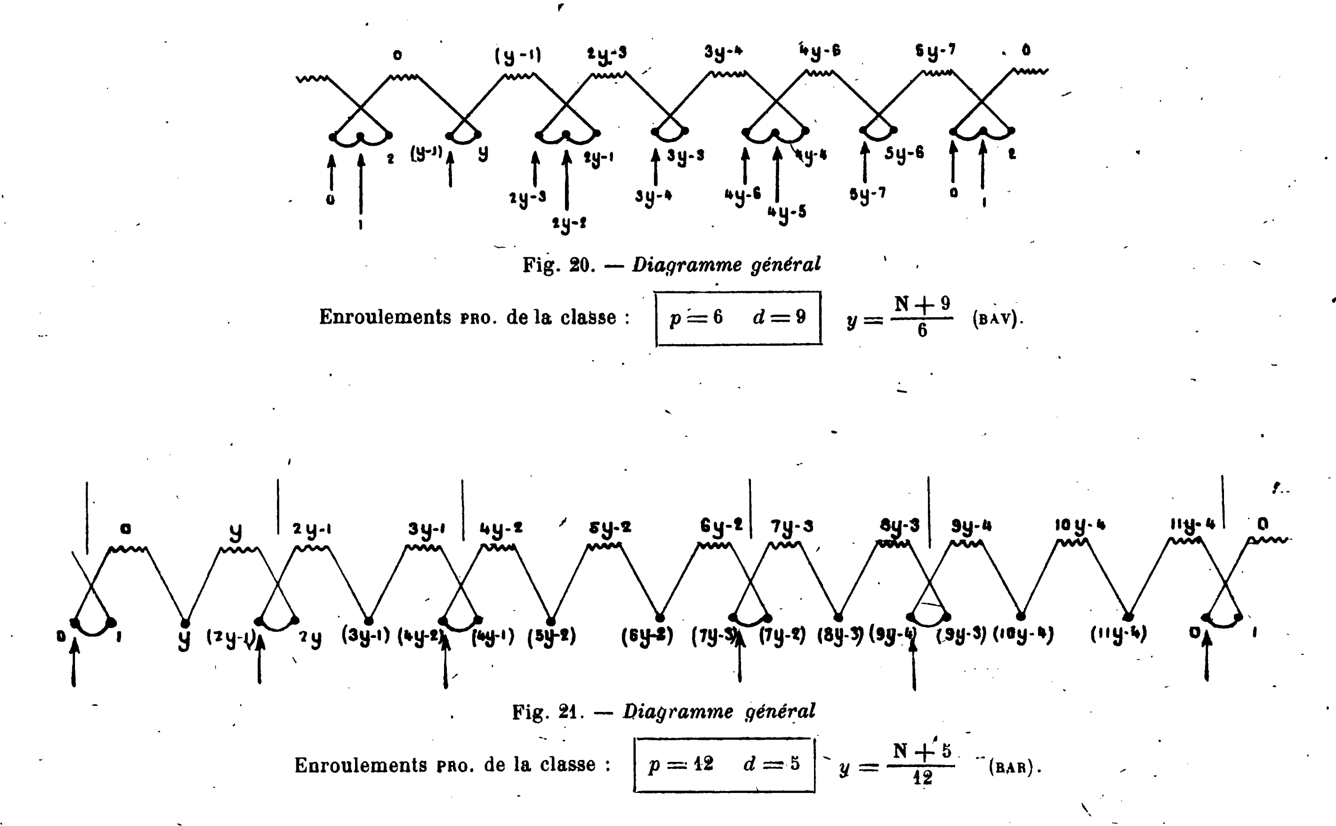


Fig. 20. — *Diagramme général*

Enroulements PRO. de la classe : $p = 6 \quad d = 9$ $\quad y = \frac{N + 9}{6}$ (BAV).

Fig. 21. — *Diagramme général*

Enroulements PRO. de la classe : $p = 12 \quad d = 5$ $\quad y = \frac{N + 5}{12}$ (BAR).

B. — Commutations anormales.

a) *Balais dans la même région.* — Nous avons remarqué (chap. III, § 2, A, p. 35) que si l'on plaçait côte à côte, dans une même région neutre, les d balais de même signe d'un enroulement de $2d$ circuits, ces balais mettaient en court-circuit, les p sections commutées groupées *en série*.

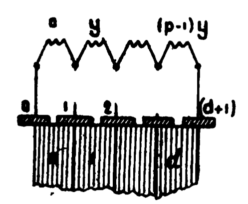


Fig. 22. — *Commutation anormale. Balais placés dans la même région.* Diagramme général.
(d balais commutent p sections groupées en série.)

La figure 22 est le diagramme général de cette disposition.

b) *Balais également répartis.* — Nous avons vu aussi (chap. III, § 2, B, p. 36) que lorsqu'on faisait usage de balais supplémentaires, de façon à placer le même nombre de balais dans toutes les régions, on obtenait la *commutation individuelle* de toutes les sections, mais on augmentait, en même temps, le nombre des sections mises en court-circuit, d'autant d'unités qu'il y avait de balais supplémentaires.

Dans les machines où p est *supérieur à* d, le nombre total des balais de même signe est alors p au lieu de d et le nombre des sections mises en court-circuit par ces balais est :

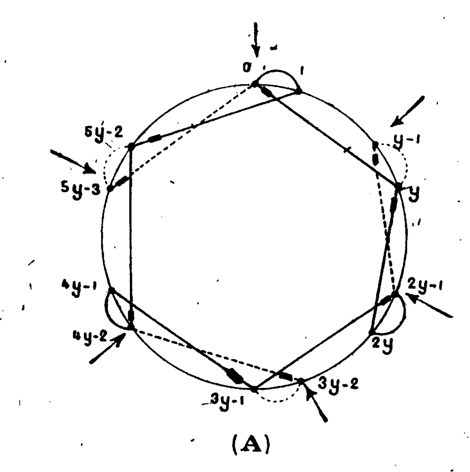
$$p + (p - d) = 2p - d \quad \text{au lieu de } p.$$

Lorsque p est *inférieur à* d, si d est inférieur à $2p$ ($p < d < 2p$), le nombre total des balais de même signe est $2p$ au lieu de d; celui des sections en court-circuit est :

$$p + (2p - d) = 3p - d \quad \text{au lieu de } p \text{ et ainsi de suite.}$$

La figure 23 est le diagramme général de cette disposition, pour la *classe* $\boxed{p = 6 \quad d = 3.}$ à laquelle appartient l'enroulement particulier, précédemment pris en exemple (figure 14, p. 37).

Comparons les sections en court-circuit, dans le cas de la



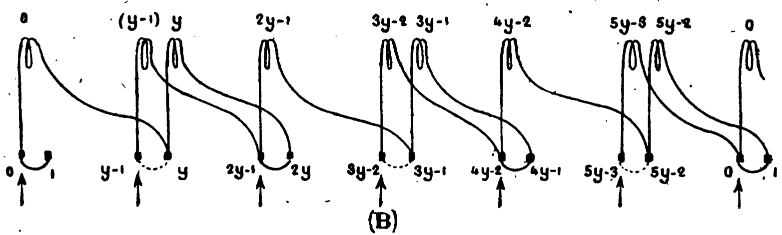


Fig. 23. — *Commutation anormale. Balais également répartis.*

Classe : $p = 6 \quad d = 3$

Diagramme général.

(A) Diagramme circulaire. — (B) Diagramme rectiligne.

commutation normale et dans celui des balais également répartis. Dans le cas de la commutation normale on a :

Commutation normale.

Balais	0	1	2
Sections en court-circuit.	0 y	$2y - 1$ $3y - 1$	$4y - 2$ $5y - 2$
Balais	1	2	0

Les sections sont commutées par groupes de deux en série.

Dans le cas des balais également répartis on a :

Balais également répartis.

Balais.	0	1	2	3	4	5
Sections en court-circuit.	0	$\begin{pmatrix} y-1 \\ y \end{pmatrix}$	$2y-1$	$\begin{pmatrix} 3y-2 \\ 3y-1 \end{pmatrix}$	$4y-2$	$\begin{pmatrix} 5y-3 \\ 5y-2 \end{pmatrix}$
Balais.	1	2	3	4	5	0

Les sections sont toutes commutées individuellement. Les sections supplémentaires au nombre de trois sont :

$$(y-1) \qquad (3y-2) \qquad (5y-3)$$

Ainsi que le montre la figure, la durée du court-circuit des sections supplémentaires et des sections :

$$y \qquad (3y-1) \qquad (5y-2)$$

qui sont commutées par les mêmes balais est plus grande que celle des autres sections :

$$0 \qquad (2y-1) \qquad (4y-2)$$

La symétrie de la commutation est détruite.

7° Formule de passage des balais d'un signe donné aux balais de signe contraire

Il nous reste à montrer que l'*on peut toujours obtenir les emplacements des balais négatifs, en faisant tourner les balais positifs d'un certain angle*, et à déterminer cet angle que nous évaluerons en nombre de lames du collecteur.

Les formules sont différentes suivant que y est PAIR OU IMPAIR.

A. — **Formule de passage, dans le cas où y est impair.**

Supposons d'abord y IMPAIR.

Nous savons que, dans ce cas, les *balais positifs* occupent, parmi tous les balais pris dans l'ordre naturel, les rangs *pairs* et les *balais négatifs*, les rangs *impairs* (chap. VI, § 2, A. Remarque 2, p. 50).

Considérons le BALAI NÉGATIF qui occupe, dans l'ensemble des balais pris dans l'ordre naturel, le rang :

$$j = (2k - 1).$$

Son emplacement : L_{2k-1} est déterminé par la double relation :

$$L_{2k-1} = \frac{1}{2}\left[\beta_{2k-1}\, y \mp (2k-1)\right] \qquad \beta_{2k-1} = \frac{(2k-1)\, p \pm \varepsilon_{2k-1}}{d}$$

dans laquelle : β_{2k-1} est un nombre *impair* et ε_{2k-1} un nombre (pair ou impair) ***inférieur à 2d***.

Faisons reculer le balai $(2k - 1)$ d'un nombre de lames $L_{2\lambda-1}$ défini par la double relation :

$$\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{1}{2}\left[\beta_{2\lambda-1}\, y \pm (2\lambda-1)\right]} \qquad \boxed{\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda-1)\, p \pm \varepsilon_{2\lambda-1}}{d}}$$

dans laquelle λ est un *nombre entier arbitraire, inférieur ou égal à d* et $\varepsilon_{2\lambda-1}$ un nombre entier, *inférieur à 2d*, tel que $\beta_{2\lambda-1}$ soit un nombre entier *impair*. Le signe de $\varepsilon_{2\lambda-1}$ dans l'expression de $\beta_{2\lambda-1}$ est le même que celui de ε_{2k-1} dans l'expression de β_{2k-1}.

Après son déplacement, le balai se trouvera posé sur la lame, dont le numéro d'ordre L est déterminé par la relation :

$$L_x = L_{2k-1} - L_{2\lambda-1} = \frac{2(k-\lambda)\, p \pm (\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1})}{2d}\, y \mp (k-\lambda)$$

L_x étant nécessairement un nombre entier et y étant impair, $(\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1})$ est un nombre pair, et dans l'expression ci-dessus mise sous la forme :

$$L_x = \frac{(k-\lambda)\, p \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1})}{d}\, y \mp (k-\lambda)$$

le terme : $\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1}\right]$ est un *nombre entier inférieur à d.*

Deux cas sont à distinguer, suivant que $(k-\lambda)$ est *positif* ou *négatif*.

Supposons d'abord : $(k - \lambda) > 0$.

Considérons le BALAI POSITIF occupant dans l'ensemble des

balais le rang $2(k - \lambda)$ et parmi les seuls balais positifs le rang $(k - \lambda)$.

Son emplacement, déterminé par la *formule des balais positifs*, a pour expression :

$$L_{2(k-\lambda)} = L''_{(k-\lambda)} = \beta''_{k-\lambda}\, y \pm (k - \lambda) \quad \text{avec} \quad \beta''_{k-\lambda} = \frac{(k-\lambda)p \pm \varepsilon''_{k-\lambda}}{d}$$

$\varepsilon''_{k-\lambda}$ étant par définition le *nombre entier inférieur à d* donnant pour $\beta''_{k-\lambda}$ un *nombre entier* lequel peut être pair ou impair.

Si $(\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1})$ est *positif ou nul* on a évidemment :

$$\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1}\right] = \varepsilon''_{k-\lambda} \quad \text{et} \quad L_x = L''_{(k-\lambda)}$$

et dans ce cas le BALAI NÉGATIF considéré occupera, après son déplacement, l'emplacement : $L_{2(k-\lambda)} = L''_{(k-\lambda)}$ du BALAI POSITIF $2(k - \lambda)$.

Supposons ensuite : $(k - \lambda) < 0$.

Transformons l'expression de L_x en ajoutant au second membre, le nombre total N des lames du collecteur, ce qui ne modifie pas le numéro d'ordre de la lame envisagée.

Tenant compte de l'expression :

$$N = (py \mp d) = d\left[p\frac{y}{d} \mp 1\right]$$

il vient : $$L_x = \frac{(d+k-\lambda)p \pm \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1}\right]}{d}\, y \mp (d + k - \lambda)$$

$(d + k - \lambda)$ est positif.

Considérons maintenant le BALAI POSITIF $2(d + k - \lambda)$.

Son emplacement est déterminé par la relation :

$$L_{2(d+k-\lambda)} = L''_{(d+k-\lambda)} = \left[\beta''_{d+k-\lambda}\, y \pm (d + k - \lambda)\right]$$

avec : $$\beta''_{d+k-\lambda} = \frac{(d+k-\lambda)\, p \pm \varepsilon''_{d+k-\lambda}}{d}$$

$\varepsilon''_{d+k-\lambda}$ étant le *nombre inférieur à d* qui donne pour $\beta''_{d+k-\lambda}$ un nombre entier.

Si $(\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1})$ *est positif ou nul* on aura :

$$\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2\lambda-1}\right] = \varepsilon''_{d+k-l} \quad \text{et} \quad L_x = L''_{d+k-l} = L_{2(d+k-\lambda)}.$$

Le BALAI NÉGATIF $(2k - 1)$ occupera cette fois l'emplacement du BALAI POSITIF $2(d + k - \lambda)$.

Par conséquent quand on fait reculer les balais négatifs d'un nombre de lames $L_{2\lambda-1}$ défini comme il est dit ci-dessus, tous ceux de ces balais qui satisfont à la condition : $\varepsilon_{2k-1} \geqq \varepsilon_{2\lambda-1}$ occupent, après leur déplacement, les emplacements de balais positifs.

Pour que tous les balais négatifs, sans exception, occupent ainsi les emplacements de balais positifs, il suffit de choisir pour le nombre arbitraire λ celui pour lequel $\varepsilon_{2\lambda-1}$ aura la plus petite des valeurs que prend ε_{2k-1} quand on donne à k les valeurs $1.2...d$.

Déterminons cette valeur.

Soit ε le *nombre inférieur à* $2d$ donnant un nombre *impair* pour :

$$\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}.$$

Si ce nombre est nul, soit :

$$\varepsilon = 0$$

toutes les valeurs de ε_{2k-1} étant nulles, on aura :

$$\varepsilon_{2\lambda-1} = 0.$$

Si le nombre ε est différent de zéro soit :

$$\varepsilon \gtrless 0$$

nous savons (d'après la remarque 1 du chap. VI, § 3, A, p. 49) que les différentes valeurs de ε_{2k-1} sont les numéros d'ordre des sommets impairs du polygone $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$.

Soit a le plus grand commun diviseur de ε et de $2d$, le nombre des côtés du polygone est $\frac{2d}{a}$.

Si $\left(\frac{2d}{a}\right)$ est *impair*, le nombre des côtés du polygone étant impair, le dernier côté du polygone, celui qui aboutit au sommet $2d$ ou *zéro*, sera un côté impair ; la plus petite valeur de ε_{2k-1} sera donc *zéro* et l'on aura encore dans ce cas

$$\varepsilon_{2\lambda-1} = 0.$$

Si $\left(\frac{2d}{a}\right)$ est *pair*, le numéro d'ordre le plus faible, des sommets auxquels aboutissent les côtés impairs, est a, de sorte que dans ce cas :

$$\varepsilon_{2\lambda-1} = a.$$

En conséquence lorsque y est IMPAIR,
on obtient les emplacements de tous les BALAIS POSITIFS *en faisant* RECULER *l'ensemble des* BALAIS NÉGATIFS, et inversement, *on obtient les emplacements de tous les* BALAIS NÉGATIFS *en faisant* AVANCER *l'ensemble des* BALAIS POSITIFS, *d'un nombre de lames* $L_{2\lambda-1}$, *déterminé par la double relation :*

$$\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{1}{2}\left[\beta_{2\lambda-1}\, y \mp (2\lambda - 1)\right]}$$

$$\boxed{\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda - 1)\, p \pm \varepsilon_{2\lambda-1}}{d}}$$

les symboles, figurant dans ces deux relations, étant définis comme suit :

λ est un *nombre entier,* donnant pour $\beta_{2\lambda-1}$ un nombre entier IMPAIR (on prendra le plus petit).

$\varepsilon_{2\lambda-1}$ dépend de ε (nombre entier *inférieur à* $2d$ donnant pour $\beta = \frac{p \pm \varepsilon}{d}$ un nombre entier IMPAIR).

Lorsque : $\varepsilon = 0$ on a : $\varepsilon_{2\lambda-1} = 0$

Lorsque : $\varepsilon \gtrless 0$, (a étant le plus grand commun diviseur de ε et de $2d$).

si $\frac{2d}{a}$ est *impair* on a : $\varepsilon_{2\lambda-1} = 0$

si $\frac{2d}{a}$ est *pair* on a : $\varepsilon_{2\lambda-1} = a$.

LORSQUE p EST UN MULTIPLE DE d (COMMUTATION SYMÉTRIQUE).

si $\left(\frac{p}{d}\right)$ est *impair,*

on a : $\varepsilon = 0$ $\quad \varepsilon_{2\lambda-1} = 0$ $\quad \lambda = 1$ $\quad \beta_{2\lambda-1} = \frac{p}{d}$

$$\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{d}\, y \mp 1\right]}$$

et par conséquent : $\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{N}{2d}}$

si $\left(\frac{p}{d}\right)$ est *pair,*

On a :

$$\varepsilon = d \qquad \varepsilon_{2\lambda-1} = d \qquad \lambda = 1 \qquad \beta_{2\lambda-1} = \left(\frac{p}{d} \pm 1\right)$$

$$\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{d} \pm 1\right) y \mp 1\right]}$$

et :

$$\boxed{L_{2\lambda-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{N}{d} \pm y\right]}$$

B. — **Formule de passage dans le cas où *y* est pair.**

Lorsque y est PAIR :

Chaque valeur de j détermine, à la fois, un balai positif et un balai négatif dont l'un est pair l'autre impair; le balai pair pouvant, suivant les cas, être le balai positif ou le balai négatif (chap. VI, § 3, Rem. 2, p. 59).

Considérons le BALAI NÉGATIF occupant, parmi les balais négatifs, le rang :

$$j = k$$

Son emplacement : L'_k est déterminé par la double relation :

$$L'_k = \frac{1}{2}\left[\beta'_k y \pm 2k\right] \qquad \beta'_k = \frac{2kp \pm \varepsilon'_k}{d}$$

dans laquelle ε'_k est le nombre *impair inférieur à 2d*, donnant pour β'_k un nombre entier (impair).

Faisons reculer ce balai d'un nombre de lames : L'_λ défini par la double relation :

$$\boxed{L'_\lambda = \frac{1}{2}\left[\beta'_\lambda y \mp 2\lambda\right]} \qquad \boxed{\beta'_\lambda = \frac{2\lambda p \pm \varepsilon'_\lambda}{d}}$$

dans laquelle λ est un *nombre entier arbitraire inférieur à d* et ε'_λ le *nombre impair inférieur à 2d* et de même signe que ε'_k, donnant pour β'_λ un nombre entier (impair).

Après son déplacement, le balai se trouvera sur la lame :

$$L_x = L'_k - L'_\lambda = \frac{2(k-\lambda)\,p \pm (\varepsilon'_k - \varepsilon'_\lambda)}{2d} \mp (k - \lambda.$$

ε'_k et ε'_λ étant tous deux impairs leur différence est un nombre pair et dans l'expression :

$$L_x = \frac{(k-\lambda)\,p \pm \frac{1}{2}(\varepsilon'_k - \varepsilon'_\lambda)}{d} \pm (k-\lambda)$$

le terme : $\frac{1}{2}(\varepsilon'_k - \varepsilon'_\lambda)$ est un *nombre entier inférieur à d.*

En substituant simplement les symboles ε'_k et ε'_λ aux symboles ε_{2k-1} et $\varepsilon_{2\lambda-1}$ dans le raisonnement fait pour y impair, on voit immédiatement que tous les balais négatifs occuperont des emplacements de balais positifs, si on choisit pour λ le nombre auquel correspond, pour ε'_λ, la plus petite des valeurs de ε'_k.

Toutes les valeurs de ε'_k étant impaires nous savons déjà que ε'_λ ne peut être nul ; et nous savons en outre (d'après la remarque 1 du chap. VI, § 3, A, p. 58) que les valeurs de ε'_k sont les numéros d'ordre des sommets impairs du polygone $\left[\frac{\varepsilon}{2d}\right]$ ε étant le nombre *impair inférieur à 2d* qui donne pour $\beta = \frac{2p \pm \varepsilon}{d}$ un nombre entier (forcément impair).

Le plus faible de ces numéros d'ordre impairs est évidemment le plus grand commun diviseur a de ε et de $2d$, on aura donc toujours :

$$\varepsilon'_\lambda = a.$$

Par conséquent lorsque y est PAIR,

on obtient les emplacements des BALAIS POSITIFS *en faisant* RECULER *l'ensemble des* BALAIS NÉGATIFS *et* inversement *on obtient les emplacements des* BALAIS NÉGATIFS *en faisant* AVANCER *les* BALAIS POSITIFS *d'un nombre de lames* L'_λ *déterminé par la double relation :*

$$L'_\lambda = \frac{1}{2}[\beta'_\lambda y \pm 2\lambda] \qquad \beta'_\lambda = \frac{2\lambda p \pm \varepsilon'_\lambda}{d}$$

Posons : $L' = L_{2\lambda} \qquad \beta'_\lambda = \beta_{2\lambda} \qquad \varepsilon'_\lambda = \varepsilon_{2\lambda}$

il vient :

$$\boxed{L_{2\lambda} = \frac{1}{2}[\beta_{2\lambda} y \mp 2\lambda] = \beta_{2\lambda}\left(\frac{y}{2}\right) \mp \lambda}$$

$$\boxed{\beta_{2\lambda} = \frac{2\lambda p \pm \varepsilon_{2\lambda}}{d}}$$

les symboles figurant dans ces deux relations étant définis comme suit :

λ est *le plus petit nombre entier* donnant pour $\beta_{2\lambda}$ un nombre entier (impair)

$\varepsilon_{2\lambda}$ est égal à a, plus grand commun diviseur de ε et de $2d$.

ε est le nombre *impair inférieur à* $2d$ qui donne pour $\beta = \frac{2p \pm \varepsilon}{d}$ un nombre entier (impair).

LORSQUE p EST UN MULTIPLE DE d (COMMUTATION SYMÉTRIQUE)

on a : $\varepsilon = d$ $\varepsilon_\lambda = d$ $\lambda = 0$ $\beta_\lambda = \pm 1$

$$\boxed{L_{2\lambda} = \pm \frac{y}{2}}$$

C. — **Formule générale.**

On peut réunir en une seule, facile à se rappeler, les formules établies pour des parités différentes de y.

En convenant de désigner par :

λ un nombre entier de *même parité que* y et par :

Λ_0 l'angle, évalué en nombre de lames du collecteur, dont il faut faire tourner les balais positifs pour les faire coïncider avec les balais négatifs ;

on a dans tous les cas (y pair ou impair) :

$$\boxed{\Lambda_0 = \frac{1}{2}\left[\beta_\lambda y \mp \lambda\right]}$$

$$\boxed{\beta_\lambda = \frac{\lambda p \pm \varepsilon_\lambda}{d}}$$

D. — **Diagrammes des sections commutées par les balais négatifs.**

Puisqu'on obtient les balais négatifs, en faisant avancer l'ensemble des balais positifs d'un certain nombre Λ_0 de lames du collecteur, il est évident que *la disposition des sections mises en court-circuit, par les balais négatifs, est identique à celle des sections mises en court-circuit, par les balais positifs.*

Il en résulte que *les* DIAGRAMMES DES SECTIONS COMMUTÉES PAR LES BALAIS NÉGATIFS, *se déduisent des diagrammes des sections commutées par les balais positifs*, en ajoutant Λ_0 aux numéros

d'ordre des sections mises en court-circuit par ces balais, ainsi qu'aux numéros d'ordre des lames du collecteur sur lesquels ils reposent.

E. — Applications.

Etablissons la FORMULE DE PASSAGE pour les classes d'enroulement précédemment étudiées et faisons-en l'application aux enroulements particuliers, donnés en exemple, de façon à déduire des balais positifs déterminés directement au paragraphe 3 du présent chapitre(p. 70 et suivantes) les balais négatifs correspondants.

Classe : $p = 6 \quad d = 3$

$\frac{p}{d} = 2$ étant un nombre entier pair, la formule de passage prend les formes particulières :

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{d} \pm 1\right) y \mp 1\right] \text{ pour } y \text{ impair.}$$

$$\Lambda_0 = \pm \frac{y}{2} \qquad \text{ pour } y \text{ pair.}$$

y impair.		*y* pair.	
BAV.	BAR.	BAV.	BAR.
$\Lambda_0 = \frac{1}{2}[3y \mp 1]$	$\Lambda_0 = \frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\Lambda_0 = \frac{y}{2}$	$\Lambda_0 = -\frac{y}{2}$

Exemples numériques.

N = 651		N = 639	
$y = \frac{651 + 3}{6} = 109$		$y = \frac{639 - 3}{6} = 106$	
$\Lambda_0 = 163$	$\Lambda_0 = 54$	$\Lambda_0 = 53$	$\Lambda_0 = -53$

j	L''_j	L_j	j	L''_j	L_j	j	L''_j	L_j	j	L''_j	L_j
1	217	380	1	217	271	1	213	266	1	213	160
2	434	597	2	434	488	2	426	479	2	426	373
3	651	163	3	651	54	3	639	53	3	639	586

Classe : $p = 6 \quad d = 9$

y impair. BAV.	*y* impair. BAR.	*y* pair. BAV.	*y* pair. BAR.
$\beta = \frac{6+\varepsilon}{9}$	$\beta = \frac{6-\varepsilon}{9}$	$\beta = \frac{12+\varepsilon}{9}$	$\beta = \frac{12-\varepsilon}{9}$
$\varepsilon = 3 \quad \beta = 1 \quad a = 3$	$\varepsilon = 15 \quad \beta = -1 \quad a = 3$	$\varepsilon = 15 \quad \beta = 3 \quad a = 3$	$\varepsilon = 3 \quad \beta = 1 \quad a = 3$
$\frac{2d}{a} = 6 \quad \varepsilon_{2\lambda-1} = 3$	$\frac{2d}{a} = 6 \quad \varepsilon_{2\lambda-1} = 3$	$\frac{2d}{a} = 6 \quad \varepsilon_{2\lambda-1} = 3$	$\frac{2d}{a} = 6 \quad \varepsilon_{2\lambda-1} = 3$
$\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda-1)6+3}{9}$	$\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda-1)6-3}{9}$	$\beta_{2\lambda} = \frac{4\lambda+1}{3}$	$\beta_{2\lambda} = \frac{4\lambda-1}{3}$
$\lambda = 1 \quad \beta_{2\lambda-1} = 1$	$\lambda = 0 \quad \beta_{2\lambda-1} = -1$ ou $\lambda = 3 \quad \beta_{2\lambda-1} = 3$	$\lambda = 2 \quad \beta_{2\lambda} = 3$	$\lambda = 1 \quad \beta_{2\lambda} = 1$
$\Lambda_0 = \frac{1}{2}[y \mp 1]$	$\Lambda_0 = \begin{cases} -\frac{1}{2}[y \mp 1] \\ \frac{1}{2}[3y \mp 5] \end{cases}$	$\Lambda_0 = 3\frac{y}{2} \mp 2$	$\Lambda_0 = \frac{y}{2} \mp 1$

Exemples numériques.

N = 645		N = 645	
$y = \frac{645+9}{6} = 109$		$y = \frac{645-9}{6} = 106$	
$\Lambda_0 = 54$	$\Lambda_0 = \begin{cases} -54 \\ +161 \end{cases}$ Prenons : — 54	$\Lambda_0 = 161$	$\Lambda_0 = 54$

j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j
1	108	162	1	644	590	1	107	268	1	1	55
2	216	270	2	107	53	2	214	375	2	108	162
3	215	269	3	215	161	3	215	376	3	215	269
4	323	377	4	214	160	4	322	483	4	216	270
5	431	485	5	322	268	5	429	590	5	323	377
6	430	484	6	430	376	6	430	591	6	430	484
7	538	592	7	429	375	7	537	53	7	431	485
8	1	55	8	537	483	8	644	160	8	538	592
9	0	54	9	645	591	9	645	161	9	645	54

Classe : $p = 12 \quad d = 5$

y impair. BAV.	*y* impair. BAR.	*y* pair. BAV.	*y* pair. BAR.
$\beta = \frac{12+\varepsilon}{5}$	$\beta = \frac{12-\varepsilon}{5}$	$\beta = \frac{24+\varepsilon}{5}$	$\beta = \frac{24-\varepsilon}{5}$
$\varepsilon=3 \quad \beta=3 \quad a=1$	$\varepsilon=7 \quad \beta=1 \quad a=1$	$\varepsilon=1 \quad \beta=5 \quad a=1$	$\varepsilon=9 \quad \beta=3 \quad a=1$
$\frac{2d}{a}=10 \quad \varepsilon_{2\lambda-1}=1$	$\frac{2d}{a}=10 \quad \varepsilon_{2\lambda-1}=1$	$\frac{2d}{a}=10 \quad \varepsilon_{2\lambda}=1$	$\frac{2d}{a}=10 \quad \varepsilon_{2\lambda}=1$
$\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda-1)\,12+1}{5}$	$\beta_{2\lambda-1} = \frac{(2\lambda-1)\,12-1}{5}$	$\beta_{2\lambda} = \frac{24\lambda+1}{5}$	$\beta_{2\lambda} = \frac{24\lambda-1}{5}$
$\lambda=4 \quad \beta_{2\lambda-1}=17$	$\lambda=2 \quad \beta_{2\lambda-1}=7$	$\lambda=1 \quad \beta_{2\lambda}=5$	$\lambda=4 \quad \beta_{2\lambda}=19$
$A_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}[17y-7] \\ -\frac{1}{2}[7y-3] \end{cases}$	$A_0 = \frac{1}{2}[7y-3]$	$A_0 = 5\frac{y}{2} \mp 1$	$A_0 = \begin{cases} 19\frac{y}{2} \mp 4 \\ -\left(5\frac{y}{2} \mp 1\right) \end{cases}$

Exemples numériques.

N = 1 783						N = 1 771					
$y = \frac{1\,783+5}{12} = 149$						$y = \frac{1\,771+5}{12} = 148$					
$A_0 = \begin{cases} +1\,263 \\ -520 \end{cases}$			$A_0 = 520$			$A_0 = 369$			$A_0 = \begin{cases} +1\,402 \\ -369 \end{cases}$		
j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j	j	L''_j	L'_j
1	446	1 709	1	297	817	1	443	812	1	295	1 697
2	743	223	2	594	1 114	2	738	1 107	2	590	221
3	1 189	669	3	1 040	1 560	3	1 181	1 550	3	1 033	664
4	1 486	966	4	1 337	74	4	1 476	75	4	1 328	959
5	1 783	1 263	5	1 783	520	5	1 771	369	5	1 771	1 402

CHAPITRE VIII

ENROULEMENTS MULTIPLES

1° Formule.
2° Emplacements des balais. — Commutation.
3° Force électromotrice.

1° Formule des enroulements multiples

Lorsque le pas y et le nombre N des sections ont un plus grand commun diviseur Δ, les seules lames du collecteur qui soient touchées par les côtés du polygone représentatif, sont celles dont le numéro d'ordre est un multiple de Δ; le polygone n'a que $\left(\frac{N}{\Delta}\right)$ côtés et l'enroulement se ferme, en englobant, seulement, les $\left(\frac{N}{\Delta}\right)$ sections dont les numéros d'ordre sont des multiples de Δ.

Nous allons montrer que *le nombre des dérivations de l'enroulement, ainsi obtenu est :* $\left(\frac{2\,d}{\Delta}\right)$.

En effet, posons :

$$y = \Delta y' \qquad N = \Delta N'$$

nous aurons :

$$\pm d = py - N = p(y' - N')\,\Delta$$

d est donc divisible par Δ et nous pouvons poser :

$$d = \Delta d'.$$

La formule :

$$y = \frac{N \pm d}{p}$$

prend alors la forme :

$$y' = \frac{N' \pm d'}{p}$$

où y' est premier avec N'.

Numérotons, à nouveau, les lames du collecteur de Δ en Δ (fig. 24) et joignons, de y' en y', les lames ainsi numérotées; nous obtiendrons, évidemment, le même polygone et le même enroulement que précédemment et comme le pas y' est premier avec le nombre N′ des sections, le nombre des dérivations de l'enroulement considéré est $2\,d' = \frac{2d}{\Delta}$.

Faisons tourner le nouveau polygone représentatif, de l'angle

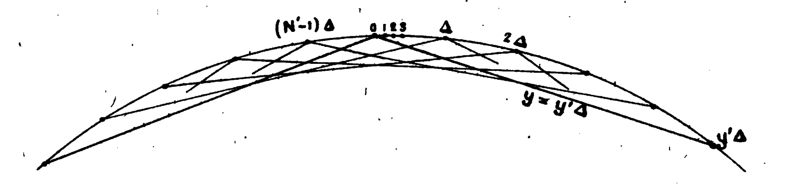


Fig. 24. — Enroulements multiples à pas normal. Polygone représentatif.

Les sommets du polygone n'occupent que les divisions de la circonférence dont les numéros d'ordre sont des multiples de Δ, plus grand commun diviseur de N et de y.
L'ordre de multiplicité du polygone est Δ.

correspondant à une lame du collecteur. Dans sa nouvelle position, le polygone représentera un enroulement identique au précédent mais décalé par rapport à lui de l'épaisseur d'une section.

Effectuons cette rotation $(\Delta - 1)$ fois de façon à faire occuper successivement par les sommets du polygone, tous les points de division de la circonférence laissés libres par le tracé du polygone initial. Dans ses positions successives, le polygone mobile représentera tour à tour Δ enroulements identiques, indépendants les uns des autres et possédant chacun $2\,d' = \frac{2\,d}{\Delta}$ dérivations.

Le nombre total des dérivations de l'induit est donc :

$$2d'.\,\Delta = 2d.$$

Il est le même que si on avait choisi un pas : $y = \frac{N \pm d}{p}$ premier avec le nombre N des sections, auquel cas on aurait eu un enroulement simple de N sections, au lieu d'un enroulement multiple composé de Δ enroulements simples de $\frac{N}{\Delta}$ sections chacun.

Lorsque $d' = 1$, les enroulements partiels dont se compose l'enroulement multiple total, sont des enroulements SÉRIE,

lorsque $d' = p$ ce sont des enroulements PARALLÈLES, *dans les autres cas, des enroulements* SÉRIES PARALLÈLES.

Exemple numérique.

Soient : $\boxed{p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651}$ $\quad y = \frac{651 \pm 3}{6} = \begin{cases} 109 \\ 108 \end{cases}$

Le pas : $y = 109$, premier avec $N = 651$ donne un enroulement simple à 6 dérivations. (C'est celui des exemples 1 et 2.)

Le pas : $y = 108$ qui a, avec N, le plus grand commun diviseur 3, donne un enroulement multiple, composé de trois enroulements série indépendants, lesquels répondent à la formule :

$$y' = \frac{217 - 1}{6} = 36.$$

2° Emplacements des balais. Commutation.

Les emplacements des $2\,d'$ balais qui sont posés sur des lames du collecteur, rattachées à celui des enroulements dont fait partie la lame zéro, se déduisent à la façon habituelle de la formule :

$$y' = \frac{N' \pm d'}{p}$$

appliquée aux lames du collecteur numérotées de Δ en Δ.

On obtient les balais des autres enroulements en juxtaposant à chacun des balais du premier enroulement, $(\Delta - 1)$ balais supplémentaires, ce qui donne bien en tout $2d$ balais (fig. 25).

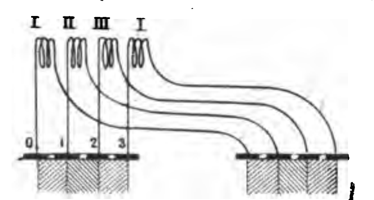


Fig. 25. — *Enroulements multiples à pas normal. Commutation.*

Cas d'un enroulement triple commuté par $2d$ groupes de trois balais normaux juxtaposés ou par $2d$ balais simples de largeur triple de celle des précédents.

Lorsque l'induit est en mouvement, une section quelconque est mise en court-circuit, successivement, par des balais appartenant (quand l'induit est arrêté) à tous les enroulements, de sorte que la durée totale du court-circuit, toutes choses égales, est Δ fois plus grande dans un enroulement multiple d'ordre Δ que dans un enroulement

simple, ayant à lui seul autant de sections et de dérivations que l'ensemble des enroulements partiels constitutifs.

On peut, sans rien changer à la commutation, substituer aux Δ balais normaux d'une même région un balai unique ayant Δ fois la largeur normale.

3° Force électromotrice d'un enroulement multiple

La force électromotrice de la machine, qui est celle d'un des enroulements partiels, a pour expression :

$$E = \frac{p}{d'}.mN'\Phi n$$

mais comme :

$$\frac{N'}{d'} = \frac{N}{d}$$

on a aussi :

$$E = \frac{p}{d}\, mN\Phi n.$$

la force électromotrice est donc la même que si l'on substituait à l'enroulement multiple un enroulement simple ayant même nombre de sections et même nombre total de circuits.

CHAPITRE IX

ENROULEMENTS A PAS RÉDUIT

1° Formule.
2° Emplacements des balais. — Commutation.
3° Force électromotrice.
4° Enroulements multiples à pas réduit.

Nous avons rencontré jusqu'ici deux classes d'enroulements. Dans les uns, toutes les sections d'une même dérivation sont situées dans un même champ et le polygone représentatif est un polygone ordinaire. Ce sont les enroulements bipolaires et les enroulements multipolaires ordinaires.

Dans les autres, les sections d'une même dérivation sont également réparties entre tous les champs de même polarité et le polygone représentatif est un polygone étoilé. Ce sont les enroulements en séries parallèles comprenant comme cas particuliers les enroulements série.

Il existe une troisième catégorie, se composant d'enroulements qui, bien que toutes les sections d'une même dérivation soient placées dans un même champ, ont néanmoins pour polygone représentatif, un polygone étoilé. Ce sont les ENROULEMENTS A PAS RÉDUIT.

1° FORMULE DES ENROULEMENTS A PAS RÉDUIT

Supposons, qu'au lieu de passer de la lame zéro du collecteur à une lame placée dans son voisinage, en rattachant à l'enroulement p sections prises dans p champs différents, on relie, directement, à cette même lame, que nous appellerons a (au lieu de d), la sortie de la section zéro (fig. 26) en ne rattachant,

ainsi, à l'enroulement que cette seule section *zéro;* puis qu'on relie la sortie de la section a à la lame $2a$, la sortie de la section $2a$ à la lame $3a$, et ainsi de suite.

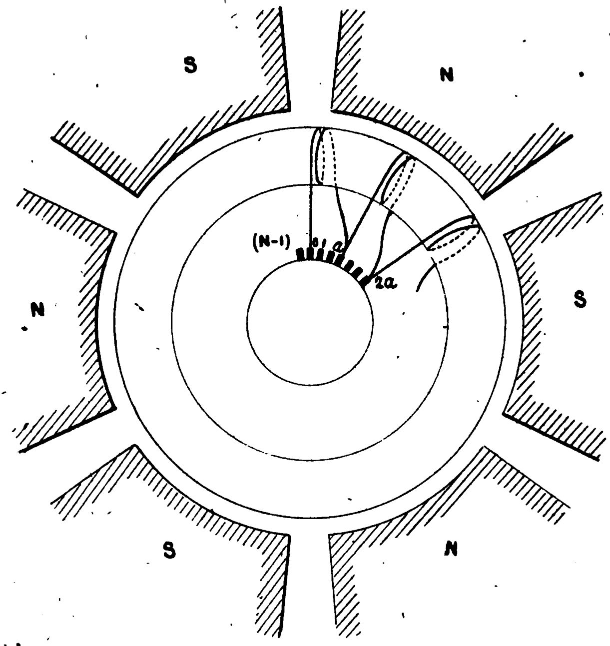


Fig. 26. — *Enroulements à pas réduit.*
Traduction graphique de la formule $y = \pm \frac{d}{p}$.
(Comparer à la figure 5, p. 8.)

$\pm a$ *sera à la fois le* PAS DE L'ENROULEMENT *et le* PAS MAGNÉTIQUE.

On devra, comme dans les autres enroulements, placer un balai, toutes les fois que la progression magnétique fera franchir une ligne neutre; on placera donc le i^{me} balai, quand on aura rattaché un nombre de sections N_i, tel que :

$$(N_i - 1)a < i \frac{N}{2p} \leqq N_i a$$

d'où :
$$(N_i - 1) < i \frac{N}{2pa} \leqq N_i$$

et on aura comme précédemment :

$$N_i = \frac{iN \pm \delta_i}{2pa} \quad \text{avec :} \quad \delta_i < 2pa.$$

Si a et N sont premiers entre eux, l'enroulement ne se fermera qu'après avoir englobé toutes les sections, c'est-à-dire pour :

$$i = 2pa$$

ce qui donne :

$$N_{2pa} = N$$

et par conséquent *le nombre des dérivations et des balais est : 2pa.*

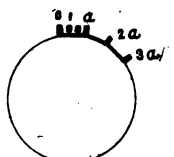


Fig. 27. — *Enroulements à pas réduits. Polygone représentatif.*

(Comparer à la fig. 6, A, p. 9.)

Le nombre des circuits de l'induit étant égal à plusieurs fois celui des pôles, les enroulements, à pas réduit, n'ont de raison d'être que lorsqu'on veut avoir un nombre relativement grand de circuits.

En désignant le nombre des circuits par $2d$, comme dans les autres enroulements on a :

$$2d = 2pa$$

d'où :

$$d = pa$$

et le pas de l'enroulement :

$$y = \pm a = \pm \frac{d}{p}.$$

y étant par hypothèse différent de *un* (sinon on aurait un enroulement ordinaire) le *polygone représentatif est bien un polygone étoilé* mais le pas de ce polygone ne comporte qu'un très petit nombre de lames, au lieu d'en comprendre un nombre voisin de $\left(\frac{N}{p}\right)$, d'où le nom d'*enroulements à pas réduit* donné à ce genre d'enroulements.

Remarque. — On peut représenter tous les enroulements fermés sur eux-mêmes, aussi bien les enroulements à pas réduit que les enroulements à pas normal par la *formule unique :*

$$y = \frac{kN \pm d}{p}$$

dans laquelle $k = 1$ correspond aux *pas normaux.*

et $k = 0$ — aux *pas réduits.*

2° Emplacements des balais et commutation d'un enroulement a pas réduit

En plaçant un balai, comme il vient d'être dit, toutes les fois que la progression magnétique fait franchir une ligne neutre, on en placera un, successivement, dans chacune des régions neutres consécutives et on en aura, ainsi, placé $2p$ quand on aura achevé le tour du collecteur.

Le nombre total des balais soit : $2d = 2pa$, étant égal au nombre des pôles multiplié par a, on sera obligé d'effectuer a fois le tour du collecteur pour arriver à placer tous les balais et on aura a balais dans chaque région.

Montrons que ces balais sont placés côte à côte.

L'emplacement L_i d'un balai quelconque i est :

$$L_i = aN_i = \frac{iN \pm \delta_i}{2p}$$

δ_i est donné par le polygone $\left[\frac{\delta}{2pa}\right]$.

En mettant i sous la forme :

$$i = 2p.m + n \qquad n < 2p$$

il vient :

$$L_{n+2pm} = \frac{(n + 2pm)N \pm \delta_{n+2pm}}{2p} = \frac{nN \pm \delta_{n+2pm}}{2p}$$

n est évidemment le numéro d'ordre de la région neutre qui contient le balai considéré.

En donnant à m les valeurs 0, 1, 2... $(a - 1)$ on obtiendra les emplacements des balais situés dans la région n, et on aura les emplacements de tous les balais en donnant à n les valeurs successives 0, 1, 2... $(2p - 1)$.

Deux valeurs quelconques de δ_{n+2pm} correspondant à une valeur donnée de n ont pour différence un multiple de $2p$[1]. Il

1. Soient, en effet : $i' = 2pm' + n$, $i'' = 2pm'' + n$ les valeurs correspondantes de i. La différence : $\delta_{n+2pm''} - \delta_{n+2pm'}$ est égale au produit $(i'' - i')\,\delta$ diminué du plus grand multiple de $2pa$ qu'il contient soit : $2pa$M d'où :

$$\delta_{n+2pm''} - \delta_{n+2pm'} = 2p(m'' - m')\,\delta - 2pa\text{M}.$$

en résulte que l'ensemble des a valeurs de δ_{n+2pm}, correspondant à une même valeur de n, sont les sommets du polygone de pas $2p$ qui passe par le sommet δ_n du polygone $\left[\frac{\delta}{2pa}\right]$.

Soit δ'_n le plus petit des numéros d'ordre des sommets de ce polygone de pas $2p$.

On aura, dans l'ordre croissant, les numéros d'ordre de tous les sommets, en faisant : $m = 0, 1, 2... (a - 1)$ dans l'expression :

$$\delta'_n + 2pm$$

qui est équivalente à δ_{n+2pm} et on aura les emplacements des balais de la région, en faisant : $m = 0, 1, 2... (a - 1)$ dans l'expression

$$L_{n+2pm} = \frac{nN \pm \delta'_n}{2p} \pm m.$$

Posons : $$L'_n = \frac{nN \pm \delta'_n}{2p}$$

il vient : $$L_{n+2pm} = L'_n \pm m.$$

Les emplacements des a balais de la région n sont donc :

$$L'_n \quad L'_n \pm 1 \quad L'_n \pm 2 \quad L'_n \pm (a - 1).$$

Ces balais sont évidemment placés côte à côte.

Ils mettent en court-circuit la section L'_n, ainsi que le montre la figure 28 pour la région zéro, où $L'_n = 0$.

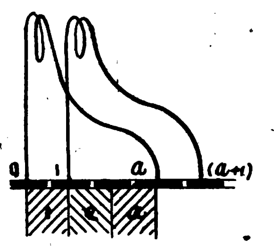


Fig. 28. — *Enroulements à pas réduits. Commutation.*
Le pas étant : $y = \frac{d}{p} = a$ la commutation s'effectue au moyen de $2d$ groupes de a balais normaux ou de $2d$ balais simples ayant a fois la largeur normale.

Les $2pa$ balais normaux mettent donc, en *court-circuit individuel*, $2p$ sections (une dans chaque région).

Les a balais normaux, juxtaposés dans une même région, peuvent être remplacés par un balai unique, dont la largeur serait a fois celle d'un balai normal et dans ces conditions chacune des sections commutées se trouverait mise en court-circuit par un balai unique, comme cela se produit dans les enroulements ordinaires, c'est-à-dire, dans les enroulements dont le pas est ± 1.

On simplifie le calcul des emplacements des balais (de même

que dans les enroulements, à pas normal), en considérant les PAS DES BALAIS.

Les dérivations successives d'un enroulement, à pas réduit, comme celles d'un enroulement, à pas normal, comprennent soit :

$$N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d} = \frac{N \pm \delta}{2pa}$$

soit : $$N_\delta = (N_1 \mp 1)$$

sections et l'ordre dans lequel se succèdent ces dérivations de N_1 ou N_δ sections est donné par le polygone $\left[\frac{\delta}{2pa}\right]$.

Les pas correspondants des balais sont :

$$\lambda_1 = aN_1 = \frac{N \pm \delta}{2p}$$

et $$\lambda_\delta = a(N_1 \mp 1) = \lambda_1 \mp a.$$

Remarque. — Pour que l'enroulement soit simple, il faut que le pas a soit premier avec le nombre N des lames du collecteur. Ce dernier nombre ne peut donc pas être divisible par le nombre des dérivations :

$$2d = 2pa$$

et l'*enroulement ne peut pas être symétrique.*

Par contre N peut être divisible par $2p$ et dans ce cas, il en est de même de δ puisque :

$$\lambda_1 = \frac{N}{2p} \pm \frac{\delta}{2p}$$

est un nombre entier.

Exemples numériques.

1er *Exemple.* | $p = 4 \quad d = 12 \quad N = 305$ |

$$a = \frac{d}{p} = 3 \qquad N_1 = \frac{305 \pm \delta}{24} \qquad \delta = 7 \qquad N_1 = 13 \qquad \lambda_1 = aN_1 = 39$$

$$\lambda_\delta = \lambda_1 - a = 36$$

Ordre : $$\left[\frac{\delta}{2p}\right] = \left[\frac{7}{24}\right]$$

Tableau des balais.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Ordre	1	1	1	δ	1	1	δ	1
λ	39	39	39	36	39	39	36	39
L_n	39	78	117	153	192	231	267	1
n	9	10	11	12	13	14	15	16
Ordre	1	1	δ	1	1	δ	1	1
λ	39	39	36	39	39	36	39	39
L_n	40	79	115	154	193	229	268	2
n	17	18	19	20	21	22	23	24
Ordre	1	δ	1	1	δ	1	1	δ
λ	39	36	39	39	36	39	39	36
L_n	41	77	116	155	191	230	269	0

Les *sections commutées par les balais positifs* sont les sections :

0. 77. 153. 229

les *sections commutées par les balais négatifs* sont :

39. 115. 191. 267

2e *Exemple.* $p = 4 \quad d = 12 \quad N = 304$

N est divisible par $2p$ et l'on a :

$$\frac{N}{2p} = \frac{304}{8} = 38 \qquad N_1 = \frac{304 \pm \delta}{24}.$$

On peut prendre : $\delta = +8 \quad N_1 = 13$

ou $\delta = -16 \quad N_1 = 12$

δ est bien divisible par $2p$.

3° Force électromotrice des enroulements a pas réduit

Dans les enroulements à pas réduit, la force électromotrice

$$E = \frac{p}{d} mN\Phi n$$

peut, en raison de la relation :

$$d = pa$$

être mise sous la forme :

$$E = \frac{mN\Phi n}{a}.$$

4° Enroulements multiples a pas réduit

Lorsque le pas a de l'enroulement et le nombre N des lames du collecteur ont un plus grand commun diviseur Δ, les seules lames touchées, par les côtés du polygone représentatif, sont, comme dans un enroulement multiple, à pas normal, celles dont le numéro d'ordre est un multiple de Δ, lesquelles sont au nombre de :

$$N' = \frac{N}{\Delta}.$$

Numérotons les lames du collecteur, de Δ en Δ, et joignons de a' en a', les lames ainsi numérotées, a' étant le quotient :

$$a' = \frac{a}{\Delta}.$$

Nous savons que nous obtiendrons ainsi un enroulement simple, dont le nombre des dérivations est :

$$2d' = 2pa'.$$

En faisant tourner le polygone représentatif $(\Delta - 1)$ fois, de l'angle correspondant à une lame, on aura, au total, Δ enroulements partiels simples; le nombre total des dérivations de l'enroulement multiple est égal à la somme des dérivations des enroulements partiels, soit :

$$2d = 2d'\Delta = 2pa'\Delta = 2pa.$$

L'expression est la même que pour un enroulement simple.

Les emplacements des balais d'un enroulement partiel s'obtiennent, comme ceux d'un enroulement simple [chapitre IX, § 2], à condition de ne tenir compte que des lames du collecteur numérotées de a' en a' et chaque région neutre recevra a' balais juxtaposés, mais chacun de ces balais devant évidem-

ment avoir Δ' fois la largeur d'un balai normal, l'ensemble des a' balais équivaut à un balai unique, dont la largeur serait :

$$a'\Delta = a$$

fois la largeur normale, comme dans un enroulement simple de pas a.

Ce balai met en court-circuit une seule section à la fois (toujours comme dans un enroulement simple) et met, succes-

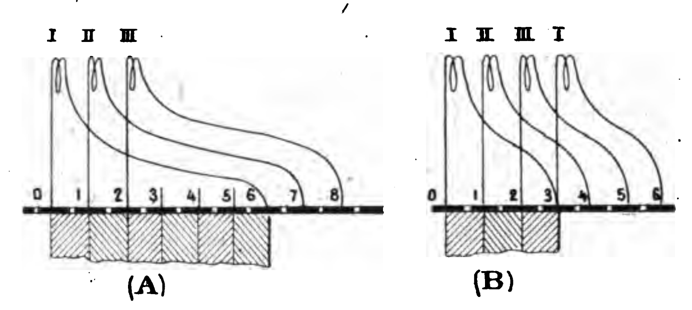


Fig. 29. — *Enroulements multiples à pas réduit. Commutation.* Exemples d'enroulements triples ($\Delta = 3$).

(A) $y = a = 6 \quad a' = 2$
(B) $y = a = 3 \quad a' = 1$

sivement, en court-circuit une section de chacun des enroulements partiels, ainsi que le montre la figure 29 A qui se rapporte au cas :

$$\Delta = 3 \quad a = 6 \quad a' = 2.$$

Si N est divisible par a, l'enroulement multiple est d'ordre a, a' est égal à 1 et les enroulements partiels sont des enroulements ordinaires, c'est-à-dire des enroulements dont les polygones représentatifs ne sont pas étoilés puisque leur pas : $a' = \pm 1$. (Voir figure 29 B.)

Si N est divisible, à la fois, par a et par $2p$, c'est-à-dire s'il est divisible par le nombre total des dérivations : $2d = 2pa$ on a :

$$N'_1 = \frac{N}{2pa} = \frac{N'}{2p}$$

les enroulements partiels sont symétriques.

Le pas des balais des enroulements partiels, rapporté aux lames numérotées de a en a, est :

$$l' = N'_1 a' = \frac{N'}{2p}$$

il est unique. Rapporté au collecteur numéroté de la façon ordinaire, il a pour expression :

$$l = l'a = \frac{N'a}{2p} = \frac{N}{2p}.$$

Exemple numérique. (Enroulements partiels symétriques.)

Soient : $p = 4 \quad d = 12 \quad N = 312$

$$a = \frac{d}{p} = 3 \qquad N'_1 = \frac{N}{2pa} = \frac{312}{24} = 13$$

$$l = \frac{N}{2p} = \frac{312}{8} = 39.$$

Emplacements des balais.

0. 39. 78. 117. 156. 195. 234. 273.

Sections mises en court-circuit.

par les *balais positifs :*

0. 78. 156. 234.

par les *balais négatifs :*

39. 117. 195. 273.

CHAPITRE X

ENROULEMENTS DES TAMBOURS ET DES DISQUES

1° Formules.
2° Diagrammes particuliers aux tambours.
3° Force électromotrice.

La théorie des enroulements des tambours et celle des enroulements des disques sont identiques. Il suffit de traiter l'un des cas pour connaître l'autre.

Les disques étant complètement abandonnés de nos jours, ce sont les tambours que nous envisagerons.

1° Formules des tambours

Les spires des anneaux passent par l'intérieur du noyau de l'induit et n'ont qu'un côté actif, les spires ou BOUCLES des tambours placées à la surface extérieure du noyau, en ont deux (fig. 30 A).

Plusieurs boucles superposées constituent un *cadre* qui est l'analogue de la section d'un anneau.

Nous appellerons GÉNÉRATRICES de l'enroulement les côtés actifs des cadres. Une génératrice est formée d'autant de conducteurs que le cadre contient de boucles.

Dans les induits dont les conducteurs sont des barres de cuivre, les génératrices sont raccordées, entre elles, à l'arrière de l'induit, et sont raccordées au collecteur à l'avant de l'induit, par des connexions rigides curvilignes.

Les cadres des tambours présentent sur les sections des anneaux, le grand avantage de pouvoir être construits sur GABARIT.

Pour que les forces électromotrices des deux côtés ou génératrices d'un même cadre s'ajoutent, il est nécessaire que ces deux côtés se trouvent toujours placés dans des champs de polarité opposée. A cet effet *l'ouverture des cadres* doit être comprise entre le *pas polaire :* $\frac{\pi}{p}$ et *l'axe polaire* $\alpha \frac{\pi}{p}$ (arc embrassé par l'épanouissement polaire).

Un enroulement dans lequel l'ouverture des cadres, est aussi voisine que possible de $\frac{\pi}{p}$ est dit : DIAMÉTRAL, dénomination qui provient du fait que dans un enroulement *bipolaire*, satisfaisant

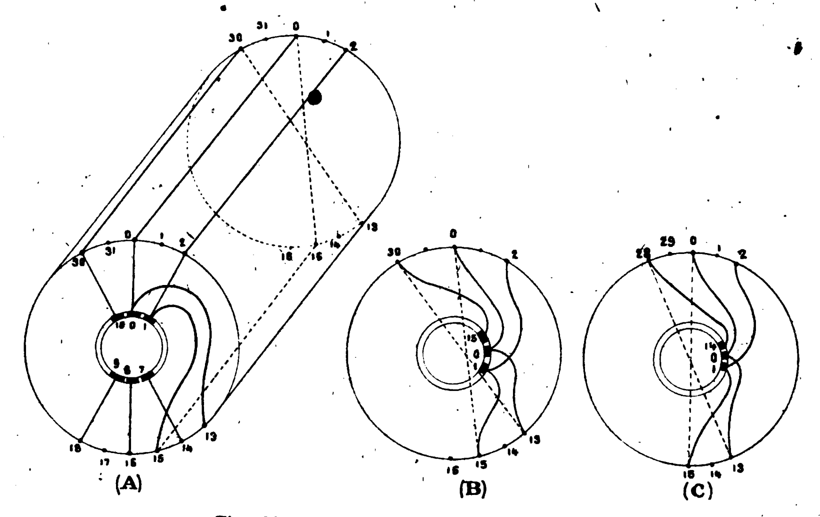


Fig. 30. — *Enroulements des tambours.*
Tambour bipolaire à une couche. Enroulement diamétral.

(A) Disposition des cadres.
(B) Disposition usuelle du collecteur. Le nombre N des cadres est pair.
(C) — — — — N — impair.

à cette condition, les deux côtés d'un même cadre sont diamétralement ou presque diamétralement opposés (fig. 30 A).

En vue de réduire l'action démagnétisante du décalage des balais, M. *Swinburne* a proposé de donner aux cadres une ouverture nettement inférieure au pas polaire. Les enroulements construits suivant ce principe sont appelés : enroulements A CORDE parce que les génératrices d'un même cadre, dans le cas d'un induit bipolaire, se trouvent aux extrémités d'une corde, au lieu d'être aux extrémités d'un diamètre.

Tout ce que nous avons dit des sections des anneaux s'appliquant, mot pour mot, aux cadres des tambours la **FORMULE GÉNÉRALE** des anneaux :

$$y = \frac{KN \pm d}{p}$$

est aussi celle des tambours ; N désignant cette fois, (outre le nombre des lames du collecteur), le nombre des cadres, au lieu du nombre des sections.

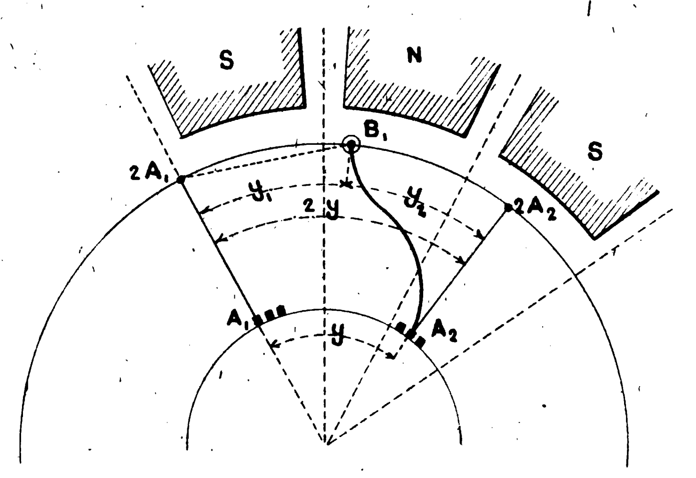


Fig. 31. — *Enroulements des tambours.*

Traduction graphique de la formule $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Le pas arrière y_1 mesure l'ouverture des cadres.

Il convient de numéroter les génératrices, en même temps que les lames et les cadres ; nous procéderons de la façon suivante.

Considérons un tambour comportant un enroulement, à une seule couche, constitué par des barres. Supposons les génératrices, en place, ainsi que le collecteur, sans qu'aucune connexion ne soit encore établie entre les génératrices, deux à deux, à l'arrière de l'induit ni, entre les génératrices et le collecteur à l'avant de l'induit.

Numérotons les génératrices, dans l'ordre naturel, suivant

lequel elles se présentent sur le pourtour de l'induit et *joignons chacune des génératrices paires, à la lame du collecteur la plus voisine* (fig. 31).

Donnons le numéro N ou *zéro*, à la lame reliée à la génératrice 2N ou *zéro*, puis numérotons, à leur tour, les lames du collecteur, dans l'ordre naturel et dans le même sens que les génératrices. Une lame quelconque portant le numéro, pair ou impair A, se trouvera rattachée à la génératrice paire, portant le numéro 2A.

Pour former un cadre nous devons réunir, à l'arrière de l'induit, l'extrémité de la génératrice paire 2A à celle d'une génératrice impaire, dont nous représenterons le numéro d'ordre par B.

L'entrée et la sortie du cadre sont respectivement les extrémités, du côté du collecteur, des deux génératrices 2A et B et le numéro d'ordre du cadre est A.

La sortie du cadre doit être rattachée à la lame :

$$A_2 = A_1 + y.$$

Posons :

$$B_1 - 2A_1 = y_1$$
$$2A_2 - B_1 = y_2$$

et ajoutons ces deux relations, membre à membre, il vient :

$$2A_2 - 2A_1 = y_1 + y_2 = 2y$$

d'où :

$$\boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

formule qui, dans le cas des tambours, se superpose à la formule générale.

y_1 est le PAS ARRIÈRE, y_2 le PAS AVANT ; ces deux pas sont évalués en nombres de génératrices, ils sont tous deux impairs étant, l'un et l'autre, la différence de deux nombres de parité différente.

y est le PAS DU COLLECTEUR ; il est évalué en nombre de lames du collecteur.

Le *pas arrière* détermine la *largeur des cadres*. L'ouverture

d'un cadre est, en effet, $\frac{2\pi}{2N} y_1$. Cet angle, exprimé en nombre de lames du collecteur (l'angle 2π étant représenté par 2N) a pour mesure le pas arrière y_1.

Le *pas avant* n'a aucune signification particulière.

On réunit souvent en une seule la formule générale et la formule particulière, ce qui donne, en représentant par $N_a = 2N$ le nombre des conducteurs actifs :

$$y_1 + y_2 = \frac{N_a \pm 2d}{p}.$$

Cette formule a l'inconvénient de n'être pas générale et de masquer l'analogie complète entre les enroulements des anneaux et ceux des tambours.

Remarque. — Nous avons supposé l'entrée de chaque cadre rattachée à la lame du collecteur la plus voisine, ce qui, dans le cas d'un induit bipolaire, donne la disposition de la figure 30 A. Les balais se trouvent alors placés, comme dans les anneaux, près des lignes neutres. En général, on relie chaque lame à deux génératrices à peu près équidistantes (fig. 30 B et C). Dans ce cas les balais se trouvent rejetés dans le voisinage des lignes des pôles.

Induits dentés. — Nous n'envisagerons que le cas où chaque encoche contient un nombre égal c de génératrices paires et impaires. Le *nombre des cases d'une encoche* est donc $2c$.

Désignons par Δ le nombre des encoches et numérotons les encoches de *zéro* à $(\Delta - 1)$ dans le même sens que les génératrices et que les lames du collecteur.

Dans les *enroulements à deux couches* nous affecterons les numéros pairs aux génératrices de la couche inférieure, les numéros impairs à celles de la couche supérieure, et nous donnerons les numéros *zéro* et *un* aux deux génératrices occupant, respectivement, la première case inférieure et la première case supérieure de l'encoche *zéro*. Le numéro d'une génératrice impaire quelconque sera ainsi le numéro de la génératrice paire, de la même file verticale, augmentée d'une unité.

Pour que tous les cadres soient identiques (c'est-à-dire pour qu'ils aient tous la même largeur) il faut que le pas arrière satisfasse à la relation :

$$y_1 = 2c \, . \, a + 1$$

dans laquelle a est un nombre entier que nous appellerons le *pas arrière des encoches.*

Posons :

$$a = \frac{\Delta \pm b}{2p}$$

b est un nombre entier quelconque tel que a soit entier.

Lorsque b est *nul ou inférieur à* $2p$ l'enroulement est diamétral, lorsque b est *égal ou supérieur à* $2p$ l'enroulement est à corde.

Le nombre des encoches n'est pas arbitraire.

Pour que la commutation soit symétrique il faut que $\frac{N}{d}$ soit entier.

Posons donc :

$$N = dN_1.$$

Il faut, en outre, que les d dérivations doubles (contenant chacune $\frac{N}{d}$ sections comprises entre deux balais de même signe consécutifs) occupent des positions identiques, dans les encoches; pour cela il faut que Δ soit un multiple de d. Posons donc :

$$\Delta = d\Delta_1$$

Enfin le nombre total des cases $2c\Delta$ doit être au moins égal au nombre $2N$ des génératrices, d'où :

$$(c\Delta - N) = (C\Delta_1 - N_1)\, d = md.$$

m étant un nombre entier positif, qui peut être nul.

Lorsque m est nul, toutes les cases sont utilisées. Lorsque m est différent de *zéro*, il y a $2md$ cases vides qu'on garnit de *fausses génératrices*, c'est-à-dire de génératrices qui ne sont pas rattachées à l'enroulement. Il y a évidemment intérêt à réduire autant que possible le nombre des cases inutilisées.

La relation ci-dessus donne :

$$N_1 = c\Delta_1 - m.$$

Portons cette expression de N_1 dans la formule générale :

$$y = \frac{N \pm d}{p} = \frac{N_1 \pm 1}{p/d}$$

il vient :

(1) $$\boxed{y = \frac{c\Delta_1 \pm 1 - m}{p/d}} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{N = c\Delta - md}$$

On attribue à m la plus petite valeur donnant pour y un nombre entier.

Lorsque c est *premier avec p/d* on peut faire : $m = 0$, d'où :

(2) $$y = \frac{c\Delta_1 \pm 1}{p/d} \qquad \text{avec} \qquad N = c\Delta.$$

Lorsque c n'est *pas premier avec p/d* on applique les formules (1) mais il est à remarquer que, *dans le cas d'un enroulement progressif, on a toujours : $m = 1$*, d'où :

(3) $$y = \frac{c\Delta_1}{p/d} = \frac{c\Delta}{p} \qquad \text{avec} \quad N = c\Delta - d.$$

Exemple : $p = 18$ $d = 6$ $c = 3$ $N = 2\,800$ (environ)

$p/d = 3$ n'étant pas premier avec c, m est différent de zéro. Dans le cas d'un *enroulement progressif*, on a :

$$m = 1 \qquad y = \frac{c\Delta}{p} = \frac{\Delta}{6} \qquad N = 3\Delta - 6$$

Essayons : $y = 157$ d'où : $\Delta = 6y = 942$

$$N = 3 \,.\, 942 - 6 = 2\,820.$$

Le nombre des cases vides est : $2d = 12$.

Dans le cas d'un *enroulement rétrograde*, on a :

$$m = 2 \quad y = (\Delta_1 - 1) \qquad N = 3\Delta - 12.$$

Prenons : $y = 157$ d'où : $\Delta_1 = 158$ $\Delta = 948$

$$N = 3 \cdot 948 - 12 = 2\,832.$$

Le nombre des cases vides est : $4d = 24$.

2° Diagrammes particuliers aux tambours

Les emplacements des balais des tambours se déterminent exactement comme ceux des balais des anneaux.

Les tableaux des balais et les diagrammes de commutation établis pour les anneaux s'appliquent directement aux tambours, en substituant les cadres aux sections.

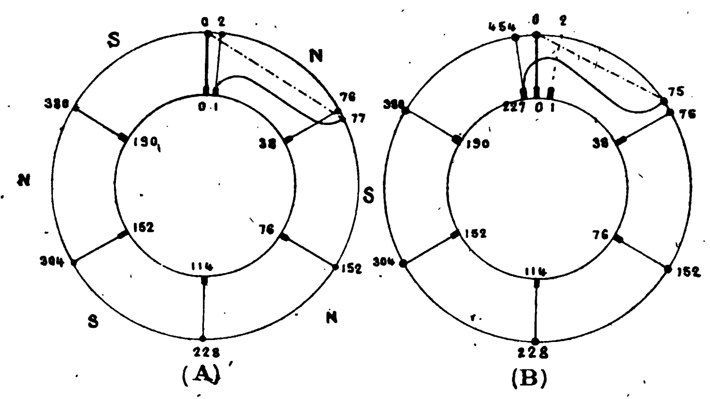


Fig. 32. — *Enroulements des tambours. Enroulement parallèle ordinaire.* $p = d = 3$ $N = 228$.

(A) Enroulement PRO. $y = 1$ $y_1 = 77$ $y_2 = -75$
(B) Enroulement RETRO. $y = -1$ $y_1 = -75$ $y_2 = -77$

On peut aussi tracer, pour les tambours, des DIAGRAMMES SPÉCIAUX, *en figurant les* GÉNÉRATRICES *de l'enroulement au lieu de figurer des cadres.*

Il suffit de se rappeler, que le numéro d'ordre d'une génératrice paire est le double du numéro d'ordre de la lame du collecteur à laquelle cette génératrice est rattachée et que le numéro d'ordre d'une génératrice impaire quelconque est égale au numéro d'ordre de la génératrice paire, faisant partie du même cadre, augmenté du pas arrière y_1.

Les génératrices commutées, par les balais négatifs, se déduisent de celles commutées, par les balais positifs, en ajou-

tant ($2A_0$) aux numéros d'ordre de ces dernières; A_0 étant le nombre donné par la formule de passage.

Nous donnerons quelques exemples.

Enroulement ordinaire. — La figure 32 indique les *pas avant et arrière* d'un *enroulement ordinaire :*

$$p = d = 3 \qquad N = 228 \qquad y = \pm 1$$

La figure 32 A se rapporte à un *enroulement progressif* $y_1 = 77$ $y_2 = -75$

La figure 32 B, à un *enroulement rétrograde* $y_1 = 75$ $y_2 = -77$.

Enroulement parallèle étoilé. — La figure 33 A montre les

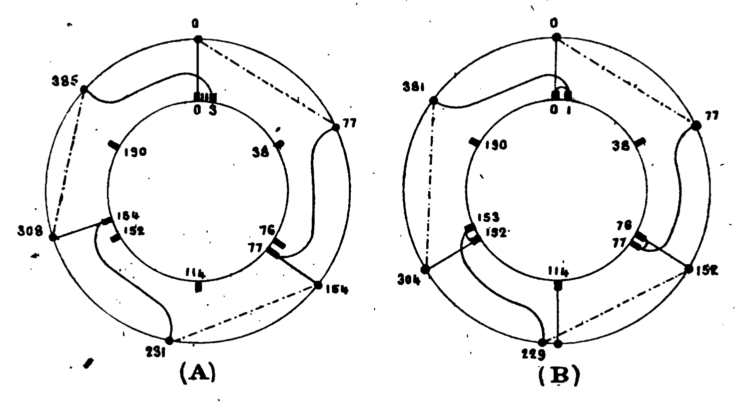


Fig. 33. — *Enroulements des tambours. Enroulement parallèle étoilé.*

$$p = d = 3 \qquad N = 228$$

Enroulement pro. $y = \frac{228}{3} + 1 = 77$ $y_1 = y_2 = y = 77.$

(A) Pas avant et arrière.
(B) Diagramme de commutation. (Comparer à la figure 16, A, p. 40.)

pas avant et arrière, pour le même induit que le précédent, supposé pourvu d'un *enroulement parallèle étoilé.*

$$p = d = 3 \qquad N = 228 \qquad y = y_1 = y_2 = 77$$

La figure 33 B est le diagramme circulaire de la commutation de cet enroulement.

ENROULEMENT SÉRIE. — La figure 34 est le DIAGRAMME CIRCULAIRE de la commutation de l'enroulement *série* :

$$p = 3 \quad d = 1 \quad N = 230 \quad y = y_1 = y_2 = 77$$

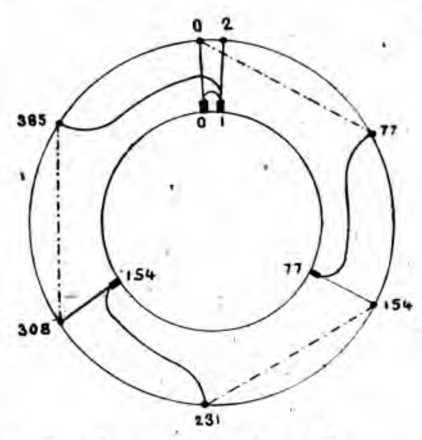


Fig. 34. — *Enroulements des tambours. Enroulement série.*

$p = 3 \quad d = 1 \quad N = 230.$

Enroulement PRO. $y = \frac{230 + 1}{3} = 77 \quad y_1 = y_2 = y = 77.$

(Comparer au diagramme de l'enroulement série d'un anneau, figure 15, A, p. 39.)

ENROULEMENT EN SÉRIES PARALLÈLES. — La figure 35 représente, à la fois, le DIAGRAMME CIRCULAIRE et le DIAGRAMME RECTILIGNE de la commutation de l'enroulement *en séries parallèles* :

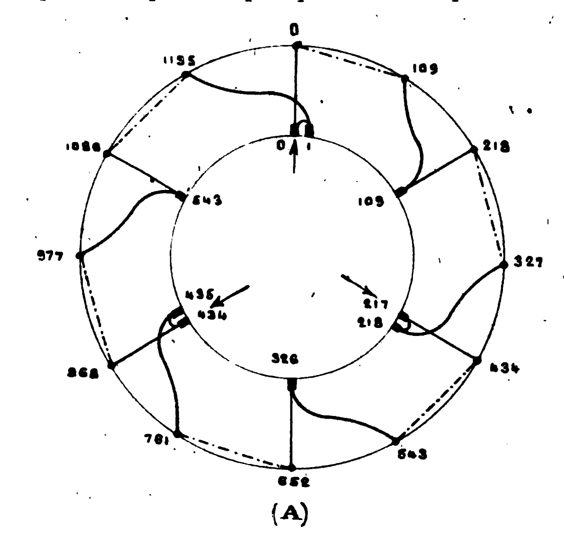
$$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651 \quad y = y_1 = y_2 = 109$$

Remarque. — Dans le mode de représentation, imaginé par M. Fritsche et dont l'usage s'est beaucoup répandu, les génératrices des enroulements des tambours sont figurées dans un plan, qui est le développement de la surface cylindrique de l'induit, et ces génératrices sont reliées, tant à l'avant qu'à l'arrière, par des lignes brisées.

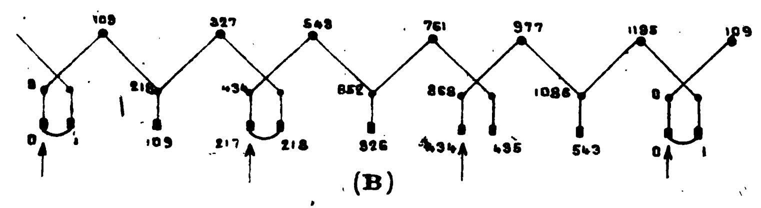
D'après l'aspect de ces schémas, on a donné le nom d'*enroulements imbriqués*, aux enroulements ordinaires et celui d'*enroulements ondulés*, aux enroulements étoilés.

Ces appellations, justifiées dans le cas des enroulements multipolaires, ne le sont pas quand on les applique, comme on

le fait quelquefois, aux enroulements bipolaires car un enroulement bipolaire quelconque peut être représenté, à volonté,



(A)



(B)

Fig. 35. — *Enroulements des tambours.*
Enroulement. Séries parallèles.
$p = 6 \quad d = 3 \quad N = 651.$

Enroulement PRO. $y = \frac{651 + 3}{6} = 109 \quad y_1 = y_2 = y = 109.$

(A) Diagramme circulaire (comparer à la figure 10, A, p. 33).
(B) Diagramme rectiligne (— — 12, A, p. 35).

sous la forme ondulée ou sous la forme imbriquée, ainsi que le montre la figure 36.

Les schémas considérés ne se fermant pas sur eux-mêmes, il est presque indispensable, pour pouvoir étudier la commutation, de figurer deux tracés de l'enroulement dans le prolongement l'un de l'autre.

Dès que le nombre des génératrices est quelque peu important le tracé de ce diagramme est très laborieux car à chaque génératrice correspondent trois traits.

Ainsi l'exemple de plus de 2.800 lames ou 5.600 génératrices que nous traitons un peu plus loin (chapitre XI, § 2, p. 125)

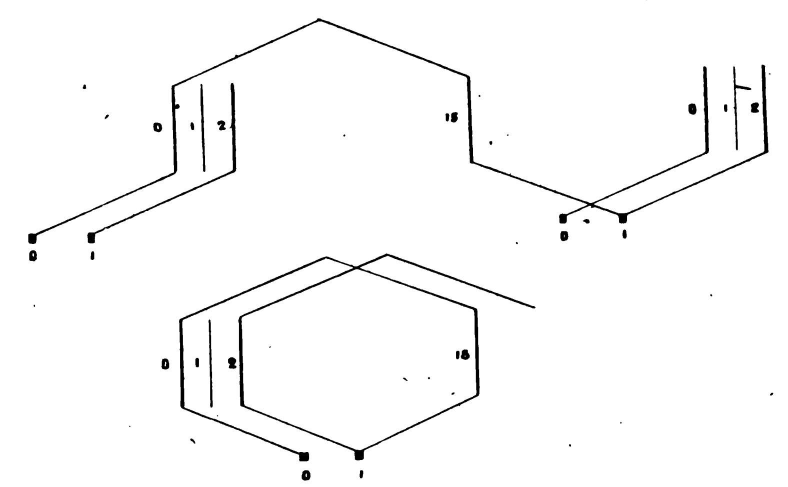


Fig. 36. — *Enroulements des tambours.*
Mode de représentation usuel.
Schéma d'un même enroulement bipolaire sous la forme ondulée et sous la forme imbriquée.

exigerait, dans ce mode de représentation, au moins 17.000 traits et pour bien faire 34.000.

3° Force électromotrice des tambours

Chaque boucle d'un enroulement en tambour, ayant deux côtés actifs, alors qu'une spire d'un enroulement en anneau n'en a qu'un, l'expression de la force électromotrice d'un tambour, en fonction du nombre des cadres de l'induit ou des lames du collecteur, est le double de celle d'un anneau soit :

$$E = \frac{p}{d} . 2mN\Phi n.$$

En fonction des côtés actifs ou génératrices, dont le nombre est représenté par N_a, l'expression de la force électromotrice est la même pour un tambour que pour un anneau soit :

$$E = \frac{p}{d} . mN_a\Phi n \cdot$$

Dans les anneaux : $N_a = N$.

CHAPITRE XI

CONCLUSIONS

1° Récapitulation générale

A. — Formules communes à tous les enroulements.

Récapitulons les résultats obtenus.

La formule générale des enroulements fermés sur eux-mêmes est :

$$y = \frac{kN \pm d}{p}.$$

p est le demi-nombre des pôles ;
d — le demi-nombre des dérivations de l'induit et le demi-nombre des balais ;
N — le nombre des lames du collecteur ;
y — le pas de l'enroulement ;
k — un coefficient qui peut être égal à *zéro* ou à *un*.
  $k = 0$ donne un *enroulement à pas réduit*.
  $k = 1$ — *enroulement à pas normal*.

d affecté du signe « plus » donne un *enroulement progressif* ; affecté du signe « moins » il donne un *enroulement rétrograde*.

Lorsque y et N sont premiers entre eux l'*enroulement* est *simple*.

Lorsque y et N ont un plus grand commun diviseur Δ l'*enroulement* est *multiple d'ordre* Δ.

Le nombre des sections ou des cadres compris dans une dérivation quelconque de l'induit est

soit : $$N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d}$$

soit : $$N_\delta = (N \mp 1)$$

δ est le nombre entier inférieur à $2d$ qui donne pour N_1 un nombre entier et le signe de *un* dans l'expression de N_δ est l'inverse du signe de δ dans l'expression de N_1.

Les dérivations contenant N_1 sections sont au nombre de $(2d - \delta)$, celles contenant N_δ sections au nombre de δ.

L'ordre dans lequel se succèdent les dérivations de N_1 *et de* N_δ *sections est donné par le tracé d'un polygone régulier de* $2d$ côtés et de pas δ, *polygone représenté symboliquement* par $\left[\frac{\delta}{2d}\right]$ (chapitre II, § 3 B, p. 22).

Tout ce qui précède s'applique également aux enroulements à pas normal et à pas réduit.

B. — Enroulements à pas normal.

Les ENROULEMENTS A PAS NORMAL ont pour FORMULE GÉNÉRALE :

$$\boxed{y = \frac{N \pm d}{p}}$$

Lorsque y et N sont premiers entre eux :

Pour $d = 1$ on a un *enroulement série*.

— $d = p$ — *enroulement parallèle*.

— d différent de 1 et de p on a un *enroulement en séries parallèles*.

Si, dans la formule $N_1 = \frac{N \pm \delta}{2d}$, on a :

$\delta = 0$ *tous les balais* sont *à cheval* sur des lignes neutres et la commutation est symétrique, ainsi que l'enroulement.

$\delta = \pm d$ les *balais positifs* sont *à cheval* sur des lignes neutres,

les *balais négatifs* sont *en avant* ou *en arrière* des lignes neutres suivant que δ est positif ou négatif.

La commutation est encore symétrique mais l'enroulement ne l'est pas.

$\delta \lessgtr d$ *tous les balais* sont *en avant* ou *en arrière* des lignes neutres suivant que δ est positif ou négatif.

Ni la commutation ni l'enroulement ne sont symétriques.

Les **PAS DES BALAIS DE MÊME SIGNE DANS L'ORDRE NATUREL** ont pour expression (chap. VII, § 2, p. 69) :

$$\boxed{l'' = b''y \mp 1}$$

b'', qui est, à la fois, le **PAS DES RÉGIONS NEUTRES** *de même signe dans lesquelles se trouvent des balais* et le **NOMBRE DES SECTIONS GROUPÉES EN SÉRIES**, *qui sont mises en court-circuit par deux balais consécutifs*, prend dans l'ordre $\left[\frac{\varepsilon''}{d}\right]$:

$d - \varepsilon''$ fois la valeur : $\beta'' = \frac{p \pm \varepsilon''}{d}$

ε'' — $\beta''_\delta = (\beta'' \mp 1)$

ε'' est le nombre entier, (de même signe que δ'' dans l'expression $N_1'' = \frac{N \pm \delta''}{d}$), qui donne un nombre entier pour β'' et le signe de *un* dans l'expression de β_δ'' est l'inverse de celui de ε'' dans l'expression de β''.

Pour p **SUPÉRIEUR A** d plusieurs sections groupées en série sont commutées à la fois. La commutation n'est **SYMÉTRIQUE** que lorsque p est un **MULTIPLE DE** d (chap. VIII, § 5, p. 75).

Pour p **INFÉRIEUR OU ÉGAL A** d, la commutation est **INDIVIDUELLE**.

Les *pas des balais de même signe* permettent d'établir des **TABLEAUX GÉNÉRAUX** *donnant les emplacements des balais de même signe de toutes les machines d'une même* **CLASSE**, (c'est-à-dire de toutes les machines ayant même nombre de pôles et même nombre de circuits), quels que soient le nombre des lames du collecteur et le pas de l'enroulement.

Connaissant les emplacements de tous les balais d'un signe donné, que pour fixer les idées on admet être les **BALAIS POSITIFS**, on peut tracer le **DIAGRAMME GÉNÉRAL** donnant à la fois

les *emplacements de ces balais et les numéros d'ordre des sections qu'ils mettent en court-circuit.*

On obtient les *emplacements des* BALAIS NÉGATIFS en faisant avancer les balais positifs d'un nombre A_0 de lames du collecteur, déterminé par la relation (chap. VIII, § 7, B, p. 89) :

$$A_0 = \frac{1}{2}\left[\beta_\lambda y \mp \lambda\right]$$

λ étant *le plus petit nombre entier de même parité que y* donnant un nombre entier pour :

$$\beta_\lambda = \frac{\lambda p \pm \varepsilon_\lambda}{d}$$

Dans cette relation ε_λ dépend de ε qui est le *nombre entier inférieur à 2d,* donnant un nombre entier *impair*, pour :

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{p \pm \varepsilon}{d} & \text{si } y \text{ est impair.} \\ \dfrac{2p \pm \varepsilon}{d} & \text{si } y \text{ est pair.} \end{cases}$$

Lorsque $\varepsilon = 0$ on a $\varepsilon_\lambda = 0$ $\lambda = 1$ $A_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{d} y \mp 1\right] = \frac{N}{2d}$.

Lorsque $\varepsilon \gtrless 0$ (a, étant le plus grand commun diviseur de ε et de $2d$) si $\left(\frac{2d}{a}\right)$ est *impair* on a encore : $\varepsilon_\lambda = 0$ $A_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{d} y \mp 1\right] = \frac{N}{2d}$

si $\left(\frac{2d}{a}\right)$ est *pair* on a $\varepsilon_\lambda = a$.

Pour avoir *les numéros d'ordre* des *sections ou cadres mis en court-circuit par les balais négatifs,* on ajoute A_0 aux numéros d'ordre des sections ou cadres mis en court-circuit par les balais positifs.

LORSQUE p EST UN MULTIPLE DE d (COMMUTATION SYMÉTRIQUE) toutes les formules prennent des formes particulièrement simples.

Le PAS DES BALAIS POSITIFS dans l'ordre naturel est *unique* et a pour expression :

$$l'' = \frac{p}{d} y \mp 1 = \frac{N}{d}$$

Pour la FORMULE DE PASSAGE des balais positifs aux BALAIS NÉGATIFS, plusieurs cas sont à distinguer.

Lorsque $\left(\frac{p}{d}\right)$ est IMPAIR on a :

$$\Lambda_o = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{d}\,y \mp 1\right] = \frac{N}{2d}$$

Lorsque $\left(\frac{p}{d}\right)$ est PAIR :

Si y est *impair* on a : $\Lambda_o = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p}{d} \pm 1\right) y \mp 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{N}{d} \pm y\right]$

Si y est *pair* on a : $\Lambda_o = \pm \frac{y}{2}$

Lorsque y et N ont un plus grand commun diviseur Δ, l'enroulement est un ENROULEMENT MULTIPLE d'ordre Δ et la nature des enroulements simples indépendants, dont l'ensemble constitue l'enroulement multiple, dépend de la valeur du quotient $\left(\frac{d}{\Delta}\right)$.

Si $\left(\frac{d}{\Delta}\right) = 1$ les *enroulements partiels* sont des *enroulements série.*

Si $\left(\frac{d}{\Delta}\right) = p$ ce sont des *enroulements parallèles.*

Si $\left(\frac{d}{\Delta}\right)$ diffère à la fois de 1 et de p ce sont des *enroulements en séries parallèles.*

C. — Enroulements à pas réduit.

La FORMULE DES ENROULEMENTS A PAS RÉDUIT est :

$$y = \pm \frac{d}{p} = \pm a$$

le nombre des dérivations :

$$2d = 2pa.$$

Les PAS DES BALAIS sont :

$$\lambda_1 = \frac{N \pm \delta}{2p}$$

$$\lambda_\delta = \lambda_1 \mp a$$

ils se succèdent dans l'ordre $\left[\frac{\delta}{2pa}\right]$ δ étant le nombre inférieur à $2pa$, qui donne un nombre entier pour : $N_1 = \frac{N \pm \delta}{2pa}$

le signe de a dans l'expression de λ_s est l'inverse du signe de δ dans l'expression de λ_i.

Chaque région neutre contient a balais normaux juxtaposés dont l'ensemble met en *court-circuit individuel* une section et le nombre des sections commutées simultanément est ainsi $2p$, comme dans les autres enroulements.

Dans un ENROULEMENT SIMPLE, N étant premier avec a ne peut être divisible par $2pa$ et l'enroulement n'est pas symétrique mais N peut être divisible par $2p$.

Dans un ENROULEMENT MULTIPLE, dont l'ordre est un multiple de a, N peut être divisible par $2pa$ et *dans ce cas l'enroulement est symétrique*.

Les a balais d'une même région neutre, lorsque l'enroulement est multiple, mettent en court-circuit individuel une seule section, comme dans les enroulements simples, et commutent successivement une section de chacun des enroulements simple constitutifs.

Les a balais normaux juxtaposés dans une même région peuvent être remplacés par un balai unique dont la largeur serait a fois celle d'un balai normal.

D. — Particularités des tambours.

Toutes les formules précédentes sont communes aux anneaux et aux tambours. La suivante ne s'applique qu'aux tambours savoir :

$$\boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

y est le PAS DE L'ENROULEMENT *évalué en nombre de lames du collecteur*, y_1 et y_2 sont les PAS PARTIELS *évalués en nombre de génératrices*, ils sont tous deux *impairs*.

y_1 est le PAS ARRIÈRE, il mesure la largeur des cadres, y_2 est le PAS AVANT, il n'a aucune signification particulière.

On déduit aisément les DIAGRAMMES DE COMMUTATION DES GÉNÉRATRICES *de ceux des cadres*, en se rappelant que les numéros d'ordre des génératrices paires sont le double des numéros des lames du collecteur auxquelles ces génératices sont rattachées et que le numéro d'ordre d'une génératrice impaire est

égal à celui de la génératrice paire du même cadre augmentée du pas arrière y.

Les GÉNÉRATRICES *commutées par les* BALAIS NÉGATIFS *se déduisent de celles commutées par les* BALAIS POSITIFS *en ajoutant* ($2\Lambda_0$) *aux numéros d'ordre de ces dernières*, Λ_0 étant le nombre donné par la formule de passage.

2° Application

Nous traiterons, comme application, le cas un peu exceptionnel d'une machine à 36 *pôles*, comportant *près de* 3.000 *lames de collecteur*, telle que celle, construite par la « General Electric C[y] », que cite Sylvanus Thompson, dans son *Traité des machines à courant continu*[1].

Que l'on veuille bien songer à la peine qu'occasionnerait la confection, pour une semblable dynamo, d'un des tableaux ou schémas usuels et à la stérilité d'un pareil effort, que rendrait cependant nécessaire l'application des méthodes préconisées par Arnold et son école.

Pour nous placer dans le cas le plus compliqué, nous adopterons, tout d'abord, un nombre de circuits qui ne soit pas un sous-multiple du nombre des pôles et nous prendrons :

$$\boxed{p = 18 \qquad d = 7}$$

Les enroulements appartenant à cette classe, ayant nécessairement une commutation dissymétrique, ne sont pas recommandables et nous examinerons ensuite la solution plus rationnelle :

$$\boxed{p = 18 \qquad d = 6}$$

qui nous donnera des résultats d'une extrême simplicité.

L'induit de la machine que nous envisageons est un tambour [on n'a guère dépassé le nombre de 16 pôles ($p = 8$) pour les machines dont l'induit est en anneau].

Nous tracerons à la fois les diagrammes de commutation des cadres et ceux des génératrices.

1. (p. 684 de la 7e édition anglaise).

A. — Etude de la classe d'enroulements :

$$p = 18 \qquad d = 7$$

a) Emplacement des balais

i) *Balais positifs.*

$$\beta = \frac{18 + \varepsilon''}{7} \begin{cases} \varepsilon'' = +3 & \beta'' = 3 \\ \varepsilon'' = -4 & \beta'' = 2 \end{cases}$$

Choisissons : $\varepsilon'' = 3$.
Les pas des balais positifs sont :

$$l_1'' = 3y \mp 1$$
$$l_8'' = l_1'' - y = 2y \mp 1$$

L'ordre dans lequel ils se succèdent $\left[\frac{3}{7}\right]$ est $11\varepsilon\ 1\varepsilon\ 1\varepsilon$

Tableau général.

NUMÉRO des balais.	ORDRE	PAS des balais.	LAMES du collecteur.
1	1	$3y \mp 1$	$3y \mp 1$
2	1	$3y \mp 1$	$6y \mp 2$
3	ε	$2y \mp 1$	$8y \mp 3$
4	1	$3y \mp 1$	$11y \mp 4$
5	ε	$2y \mp 1$	$13y \mp 5$
6	1	$3y \mp 1$	$16y \mp 6$
7	ε	$2y \mp 1$	$18y \mp 7 = 0$

ii) *Balais négatifs.*

[$\varepsilon < 2d$ $\quad\beta$ impair.]

y impair.	y pair.
$\beta = \frac{18 + \varepsilon}{7}$ $\quad \varepsilon = 3 \quad \beta = 3 \quad a = 1$	$\beta = \frac{36 + \varepsilon}{7}$ $\quad \varepsilon = 13 \quad \beta = 7 \quad a = 1$
$\beta_\lambda = \frac{18\lambda + 1}{7}$ $\quad \lambda = 5 \quad \beta_\lambda = 13$	$\beta_\lambda = \frac{36\lambda + 1}{7}$ $\quad \lambda = 6 \quad \beta_\lambda = 31$
$A_0 = \frac{1}{2}[13y \mp 5]$	$A_0 = 31\frac{y}{2} \mp 6$ ou $-\left[5\frac{y}{2} \mp 1\right]$

iii) *Exemples numériques.*

N = 2819	N = 2837
$y = \frac{2819 + 7}{18} = 157$	$y = \frac{2837 + 17}{18} = 158$
$l_1 = (3 \times 157 - 1) = 470$	$l_1 = (3 \times 158 - 1) = 473$
$l_t = 470 - 157 = 313$	$l_t = 473 - 158 = 315$
$A_0 = \frac{1}{2}[13 \times 157 - 5] = 1\,018$	$A_0 = 31 \times 79 - 6 = 2\,443$ ou -394

$y = 157$					$y = 158$				
j	ORDRE	l''	BALAIS positifs L_j''	BALAIS négatifs L'_j	j	ORDRE	l''	BALAIS positifs L''_j	BALAIS négatifs L'_j
1	1	470	470	1 488	1	1	473	473	79
2	1	470	940	1 958	2	1	473	946	552
3	ε	313	1 253	2 271	3	ε	315	1 261	867
4	1	470	1 723	2 741	4	1	473	1 734	1 340
5	ε	313	2 036	235	5	ε	315	2 049	1 655
6	1	470	2 506	705	6	1	473	2 522	2 128
7	ε	313	2 819	1 018	7	ε	315	2 837	2 443

b) Commutation

i) *Tableau général des sections ou cadres mis en court-circuit par les balais positifs.*

(Voir le diagramme de la figure 37 A.)

Balais. . .	0	1	2	3	4	5	6
Sections ou cadres. . .	0 y $2y$	$3y \mp 1$ $4y \mp 1$ $5y \mp 1$	$6y \mp 2$ $7y \mp 2$ »	$8y \mp 3$ $9y \mp 3$ $10y \mp 3$	$11y \mp 4$ $12y \mp 4$ »	$13y \mp 5$ $14y \mp 5$ $15y \mp 5$	$16y \mp 6$ $17y \mp 6$ »
Balais. . .	1	2	3	4	5	6	0

Les numéros d'ordre des sections commutées par les *balais négatifs* sont les numéros ci-dessus augmentés de A_0.

ii) *Exemples numériques.*

1er Exemple : y impair.

$$N = 2\,819 \qquad y = \frac{2\,819 + 7}{18} = 157$$

Sections ou cadres commutés par les balais positifs.

(Voir le diagramme de la figure 37 B.)

Balais.	0	1	2	3	4	5	6
Sections ou cadres en court-circuit. . . .	0 157 314	470 627 784	940 1 097 »	1 253 1 410 1 567	1 723 1 880 »	2 036 2 193 2 350	2 506 2 663 »
Balais.	1	2	3	4	5	6	0

Les numéros des sections ou cadres commutés par les balais négatifs sont les numéros ci-dessus augmentés de 1 018.

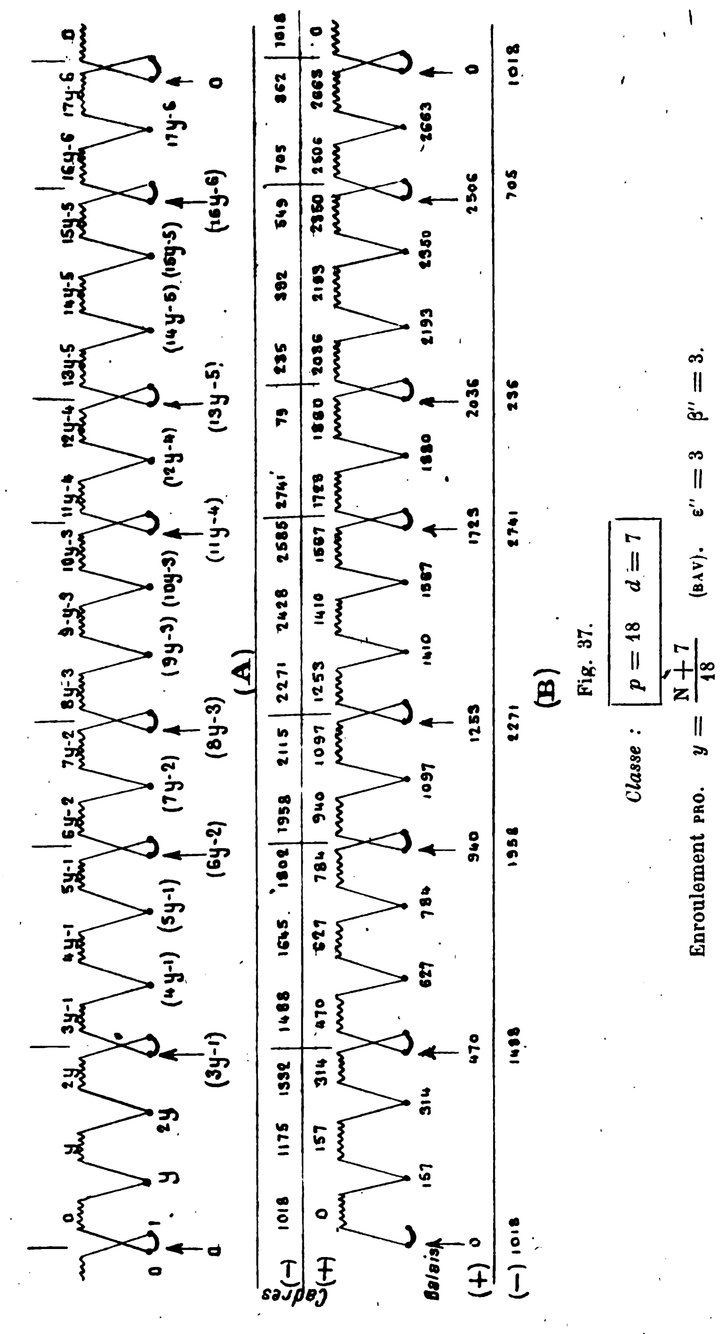


Fig. 37.

Classe : $p = 18 \quad d = 7$

Enroulement PRO. $y = \frac{N + 7}{18}$ (BAV). $\varepsilon'' = 3 \quad \beta'' = 3$.

(A) Diagramme général de commutation. Cadres ou sections. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2819 \quad y = 157$.

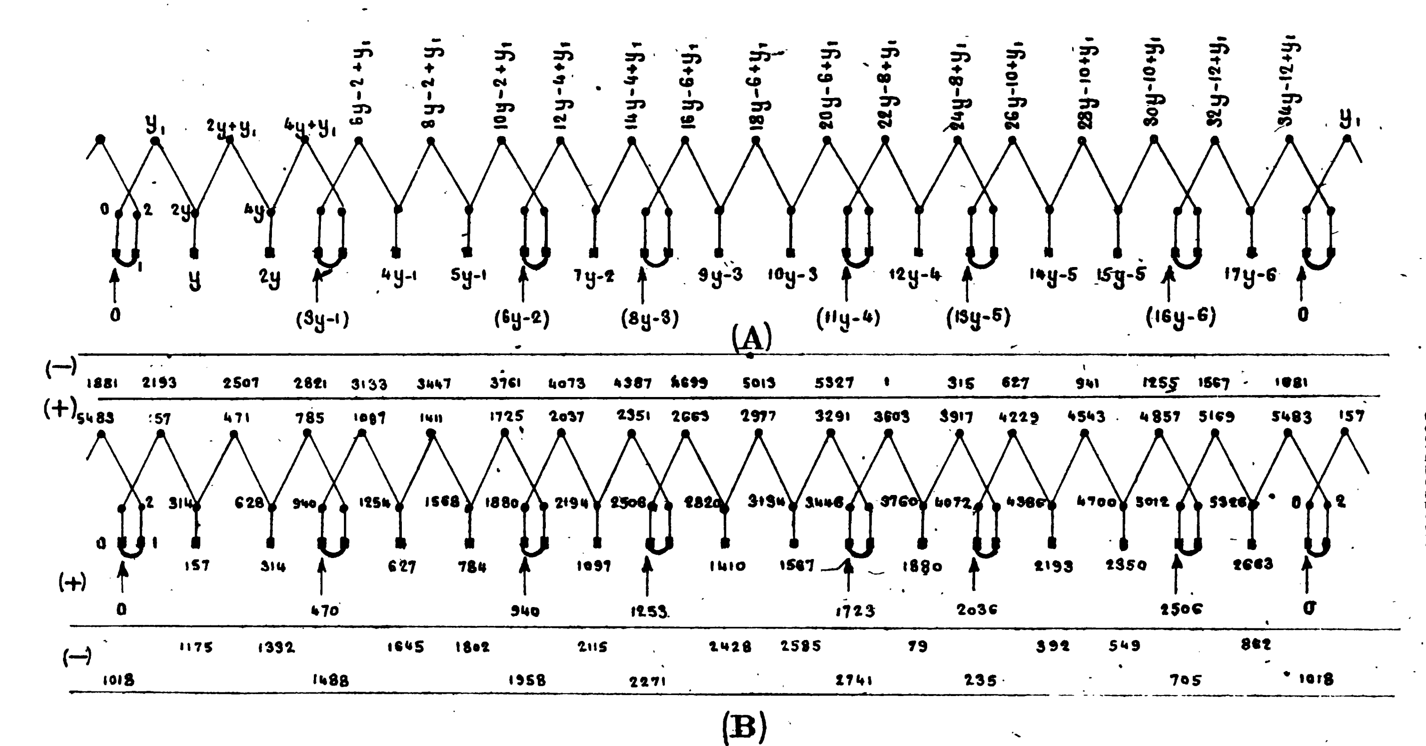


Fig. 38.

Classe : $p = 18 \quad d = 7$

Enroulement PRO. $y = \frac{N \mp 7}{18}$ (BAV) $\varepsilon'' = 3 \quad \beta'' = 3$.

(A) Diagramme général de commutation. Génératrices. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2819 \quad y = 157$.

2e Exemple : y pair.

$$N = 2\,837 \qquad y = \frac{2\,837 + 7}{18} = 158$$

Sections ou cadres commutés par les balais positifs.

Balais.	0	1	2	3	4	5	6
Sections ou cadres en court-circuit. . . .	0 158 316	473 631 789	946 2 004 »	1 261 1 419 1 577	1 734 1 892 »	2 049 2 217 2 365	2 522 2 680 »
Balais.	1	2	3	4	5	6	0

Les numéros des sections ou cadres commutés par les balais négatifs sont les numéros ci-dessus augmentés de 2443 ou diminués de 394.

iii) *Génératrices en court-circuit.*

La figure 38 *A* est le DIAGRAMME GÉNÉRAL de la commutation des GÉNÉRATRICES des enroulements de la CLASSE $\begin{cases} p = 18 \\ d = 7 \end{cases}$.

Les numéros d'ordre des lames du collecteur sont les mêmes que ceux de la figure 37 *A*, DIAGRAMME GÉNÉRAL de la commutation des CADRES des enroulements de la même classe. Les numéros d'ordre des génératrices paires sont obtenus en doublant les numéros des lames correspondantes du collecteur. Les numéros d'ordre des génératrices impaires sont les numéros des génératrices paires qui les précèdent, augmentés de y_1.

La figure 38 *B* est le DIAGRAMME PARTICULIER de la commutation des GÉNÉRATRICES de l'enroulement, dont le DIAGRAMME PARTICULIER des CADRES est représenté par la figure 37 *B*.

Le nombre, donné par la formule de passage, étant $\Lambda_0 = 1018$, on déduit les numéros des génératrices commutées, par les balais négatifs, des numéros des génératrices commutées, par les balais positifs, en ajoutant à ceux-ci : 2036.

B. — Étude de la classe d'enroulements :

$p = 18 \qquad d = 6$

d étant *pair*, le pas *y* ne peut être qu'*impair*. $\left(\frac{p}{d}\right)$ étant un nombre entier *impair*, la *commutation* et les *enroulements* de cette classe sont *symétriques*.

Le pas unique des *balais positifs* est :

$$l'' = (3y \mp 1).$$

Les sections commutées, au nombre de *dix-huit*, forment *six groupes* de *trois sections* en série.

Le nombre des lames, dont il faut faire avancer les balais positifs, pour les faire coïncider avec les *balais négatifs*, est :

$$\Lambda_o = \frac{l''}{2} = \frac{1}{2}[3y \mp 1] \cdot$$

a) Emplacements des balais. Commutation

i) *Tableau général.*

EMPLACEMENTS DES BALAIS POSITIFS		CADRES COMMUTÉS PAR LES BALAIS POSITIFS (Voir fig. 39 A.)						
j	L''_j							
1	$3y \mp 1$	Balais. . .	0	1	2	3	4	5
2	$6y \mp 2$	Cadres en court-circuit. . .	0	$3y \mp 1$	$6y \mp 2$	$9y \mp 3$	$12y \mp 4$	$15y \mp 5$
			y	$4y \mp 1$	$7y \mp 2$	$10y \mp 3$	$13y \mp 4$	$16y \mp 5$
3	$9y \mp 3$		$2y$	$5y \mp 1$	$8y \mp 2$	$11y \mp 3$	$14y \mp 4$	$17y \mp 5$
4	$12y \mp 4$	Balais. . .	1	2	3	4	5	0
5	$15y \mp 5$	Les numéros d'ordre des cadres commutés par les balais négatifs sont les numéros ci-dessus augmentés de $\frac{1}{2}[3y \mp 1]$.						
6	0							

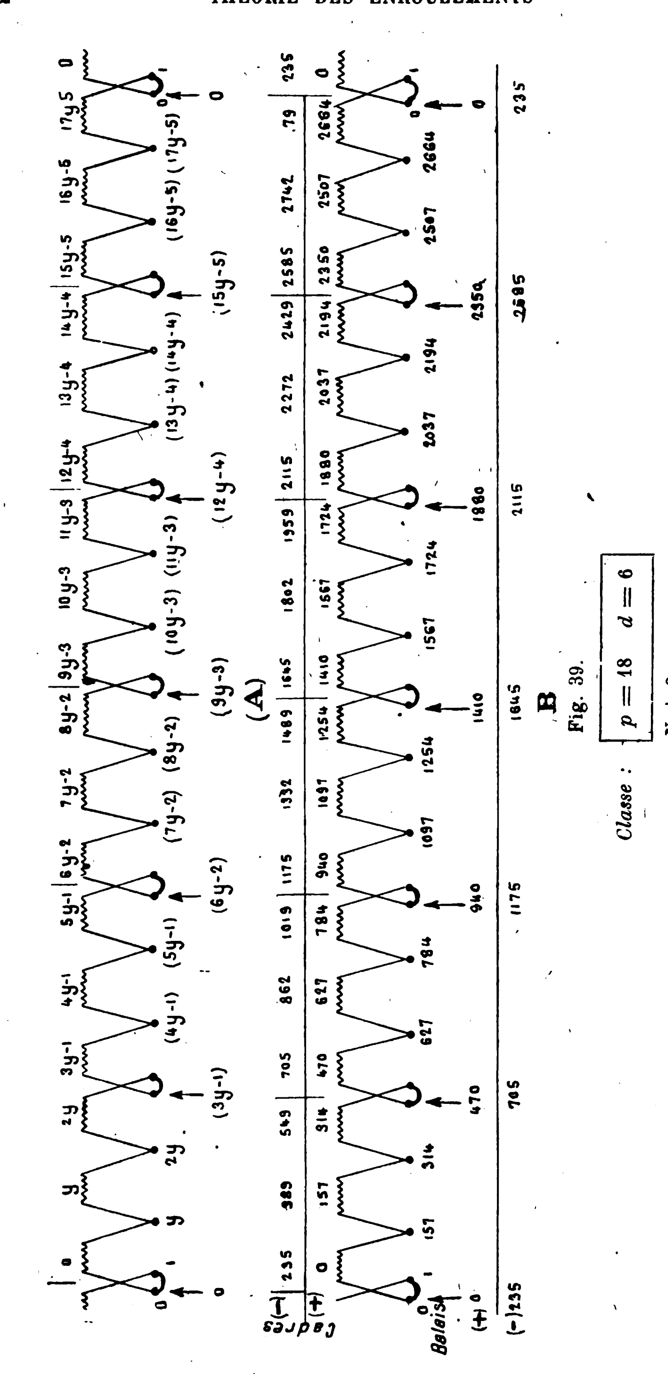


Fig. 39.

Classe : $p = 18 \quad d = 6$

Enroulement PRO. $y = \frac{N + 6}{18}$ (BAC) $\varepsilon'' = 0$ $\vartheta'' = 3$.

(A) Diagramme général de commutation. Cadres ou sections. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2820$ $y = 157$.

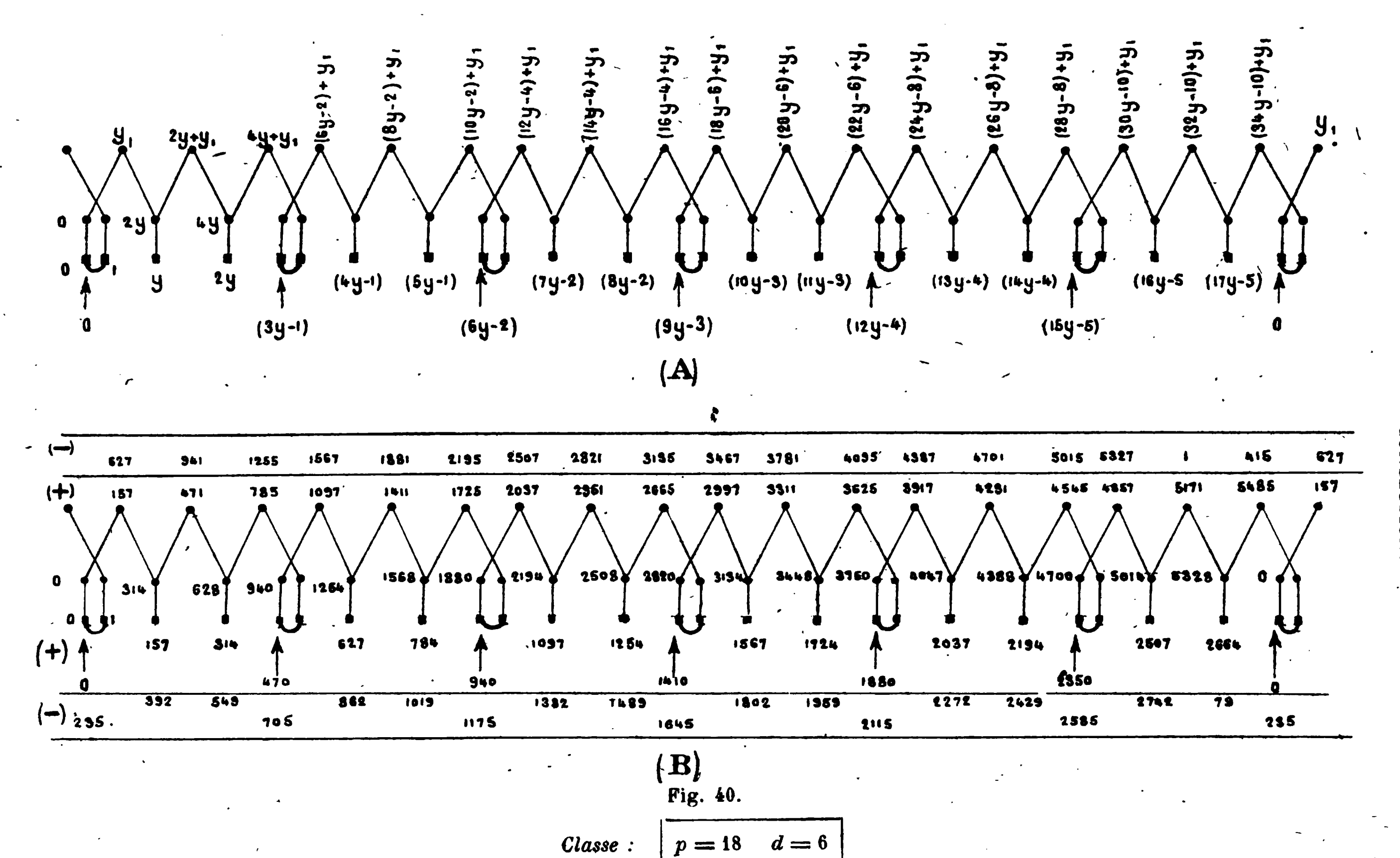


Fig. 40.

Classe : $p = 18 \quad d = 6$

Enroulement PRO. $y = \frac{N+6}{18}$ (BAC) $\varepsilon'' = 0 \quad \beta'' = 3.$

(A) Diagramme général de commutation. Génératrices. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2820 \quad y = 157.$

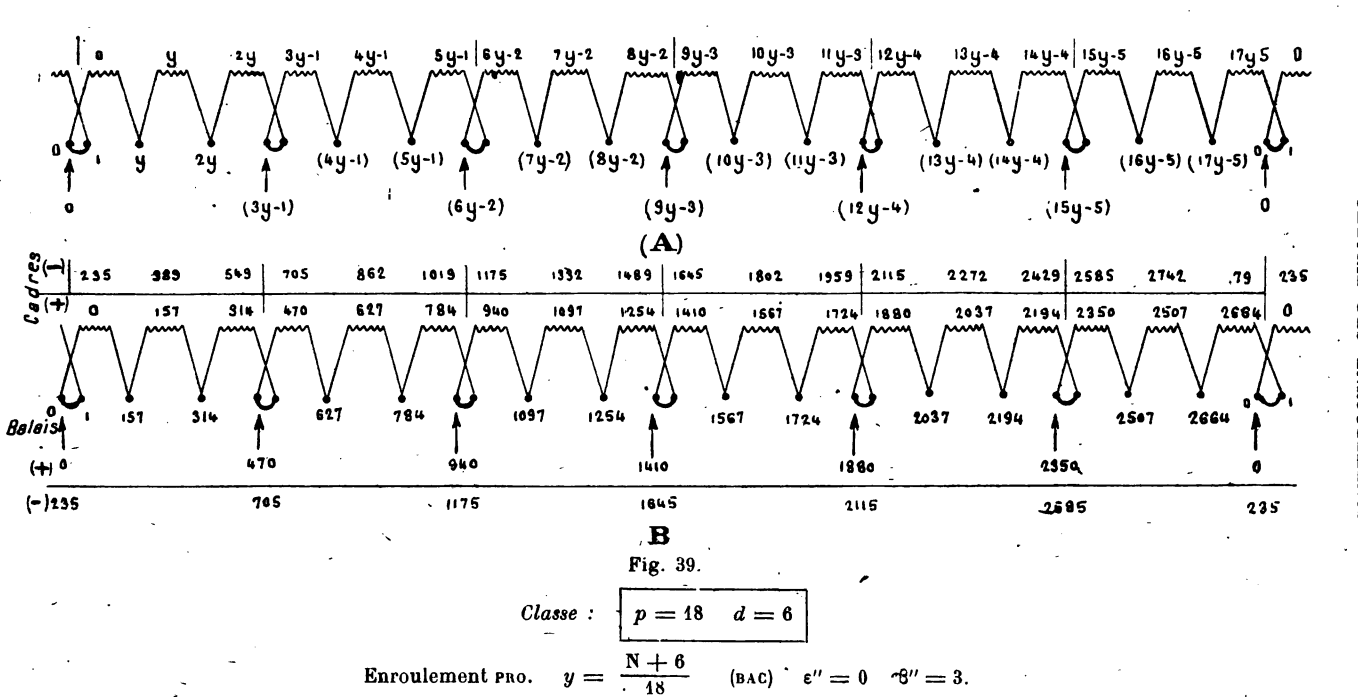


Fig. 39.

Classe : $p = 18 \quad d = 6$

Enroulement PRO. $y = \frac{N + 6}{18}$ (BAC) $\varepsilon'' = 0 \quad \delta'' = 3$.

(A) Diagramme général de commutation. Cadres ou sections. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2820 \quad y = 157$.

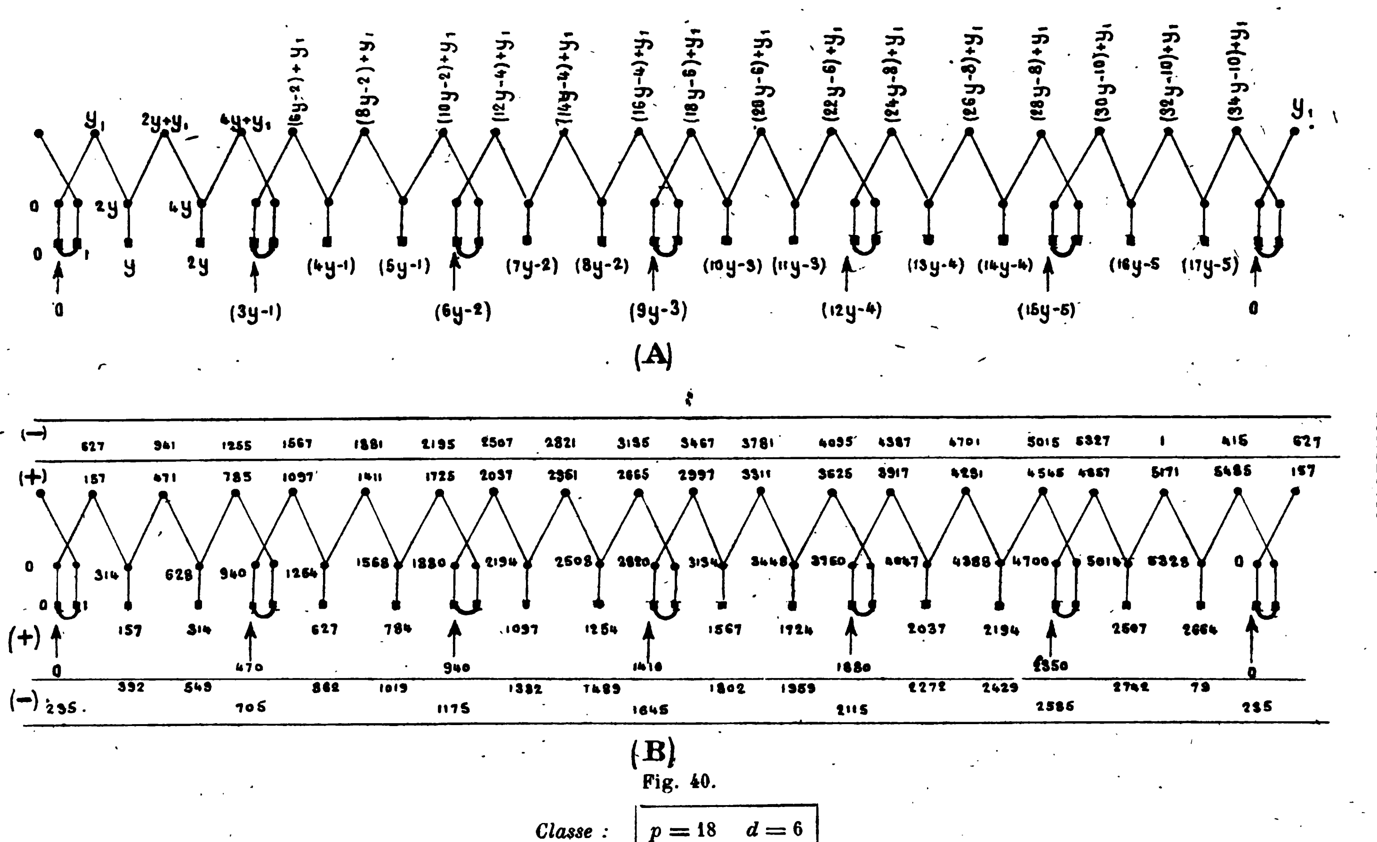


Fig. 40.

Classe : $p = 18 \quad d = 6$

Enroulement PRO. $y = \frac{N + 6}{18}$ (BAC) $\varepsilon'' = 0 \quad \beta'' = 3.$

(A) Diagramme général de commutation. Génératrices. — (B) Diagramme particulier pour $N = 2820 \quad y = 157.$

ii) *Exemple numérique.*

$$N = 2\,820 \qquad y = \frac{2\,820 + 6}{18} = 157 \qquad l'' = 470 \qquad \Lambda_0 = 235$$

j	L''_j	L'_j
1	470	705
2	940	1 175
3	1 410	1 645
4	1 880	2 115
5	2 350	2 585
6	2 820	235

CADRES COMMUTÉS PAR LES BALAIS POSITIFS (fig. 39 B)						
Balais. . .	0	1	2	3	4	5
Cadres en court-circuit . . .	0 157 314	470 627 784	940 1 097 1 254	1 410 1 567 1 724	1 880 2 037 2 194	2 350 2 507 2 664
Balais. . .	1	2	3	4	5	0

Les numéros d'ordre des cadres commutés par les balais négatifs sont les numéros ci-dessus augmentés de 235.

iii) *Génératrices en court-circuit.*

La figure 40 *A* est le DIAGRAMME GÉNÉRAL de la commutation des GÉNÉRATRICES des enroulements de la CLASSE $\begin{cases} p = 18 \\ d = 6 \end{cases}$ dont le diagramme général des CADRES est représenté par la figure 39 *A*.

La figure 40 *B* est le DIAGRAMME PARTICULIER de la commutation des GÉNÉRATRICES de l'enroulement, dont le DIAGRAMME PARTICULIER DES CADRES est représenté par la figure 39 *B*.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

FORMULE DES ENROULEMENTS A PAS NORMAL

CHAPITRE II

EMPLACEMENTS DES BALAIS

CHAPITRE III

SECTIONS EN COURT-CIRCUIT

CHAPITRE IV

ENROULEMENTS LES PLUS USUELS

CHAPITRE V

PROBLÈME INVERSE

CHAPITRE VI

TABLEAUX GÉNÉRAUX DES BALAIS

CHAPITRE VII

DIAGRAMMES GÉNÉRAUX DES SECTIONS EN COURT-CIRCUIT

CHAPITRE VIII

ENROULEMENTS MULTIPLES

CHAPITRE IX

ENROULEMENTS A PAS RÉDUIT

CHAPITRE X

ENROULEMENTS DES TAMBOURS ET DES DISQUES

CHAPITRE XI

CONCLUSIONS

